

# 14.12 Oyun Teorisi Ders Notları

## Giriş

Muhamet Yıldız

(Ders 1)

Oyun Teorisi Çok Kişili Karar Teorisi için yanlış bir isimlendirmedir. Oyun Teorisi, birden çok ajanın bulunduğu ve her ajanın ödülünün diğer ajanların eylemlerine bağlı olduğu karar verme işleminin tutarlı bir analizini yapmayı sağlayan araçlar, metodlar ve bir dil geliştirir. Böyle bir karar verme işleminde, bir ajanın kendi eylemleri üzerine olan tercihleri diğer ajanların eylemlerine bağlı olduğu için, kendi eylemi diğer ajanların ne yapacağına dair neye inandığına bağlıdır. Tabi ki, diğerlerinin ne yaptığı onların her bir ajanın ne yapacağına dair neye inandıklarına bağlıdır. Böylece, bir oyuncunun eylemi, prensip olarak, her ajanın mevcut eylemlerine, sonuçlar üzerine olan tercihlerine, diğer ajanlar için hangi eylemlerin mevcut olduğuna dair neye inandığına, ve her ajanın sonuçları nasıl sıraladığına ve diğer ajanların neye inandığına dair neye inandığına,... sürgit, bağlıdır.

Tam rekabet varsayımı altında, birden fazla (aslında sonsuz tane) karar verici vardır. Yine de, bu karar vericilerin kararlarının merkezi olmadığı varsayılır. Bir tüketici, verili fiyatlar altında, diğer tüketicilerin ne yaptığına bakmadan, edinebileceği en iyi tüketim sepetini seçmeye çalışır. Gerçek hayatta, gelecekteki fiyatlar bilinmemektedir. Tüketicilerin kararları gelecekteki fiyatlara dair olan beklentilerine bağlıdır. Gelecekteki fiyatlar da tüketicilerin bugünkü kararlarına bağlıdır. Bir kez daha karşılaşıldığı üzere, tam rekabetçi ortamlarda bile, bir tüketicinin kararları diğer tüketicilerin -toplam düzeyde- ne yapacağına dair olan inanışlarından etkilenir.

Ajanlar, diğer ajanların kendilerini ne yapacakları hakkında ne düşündüklerini de hesaba katarak, diğer ajanların ne yapacağını düşünürken, oyunu oynamanın net ve açık bir yolunu bulabilirler. Alttaki "oyunu" düşünelim:

(1)/(2)	<i>L</i>	<i>m</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	(1,1)	(0,2)	(2,1)
<i>M</i>	(2,2)	(1,1)	(0,0)
<i>B</i>	(1,0)	(0,0)	(-1,1)

Burada, 1. Oyuncu T,M,B, 2. Oyuncu da L,m,R stratejilerine sahipler. (Stratejilerini eş zamanlı seçiyorlar.) Her iki oyuncu için ödüller parantez içindeki sayılarla, ilk sayı 1. Oyuncu için, ikinci sayı da 2. Oyuncu için olmak üzere, belirtilmiştir. Örneğin, eğer 1. Oyuncu T stratejisini oynar, 2. Oyuncu da R'yi oynarsa, 1. Oyuncu 2 kazanır, 2. Oyuncu ise 1 kazanır. Varsayalım ki, her oyuncu mevcut strateji ve ödüllerin ne olduğunu biliyor, her oyuncu diğer oyuncuların mevcut strateji ve ödüllerin ne olduğunu bildiğini biliyor, her oyuncu her oyuncunun diğer oyuncuların mevcut strateji ve ödüllerin ne olduğunu bildiğini bildiğini biliyor,... sürgit.

Şimdi, 1. Oyuncu ödüllerine bakar ve farkeder ki, diğer oyuncu ne yaparsa yapsın, kendisi için B oynamaktansa M oynamak daha iyi. Yani, eğer 2. Oyuncu L oynarsa, M 1. Oyuncu'ya 2 kazandırır, B ise 1 kazandırır; eğer 2. Oyuncu m oynarsa, M 1 kazandırır, B ise 0 kazandırır; ve eğer 2. Oyuncu R oynarsa, M 0 kazandırır, B ise -1 kazandırır. Dolayısı ile, 1. Oyuncu farkeder ki, B oynamamalı.<sup>1</sup> Şimdi 1. Oyuncu T ile M'yi karşılaştırır. Farkeder ki, eğer 2. Oyuncu L ya da m oynarsa, M T'den daha iyi bir sonuç verir, ama eğer 2. Oyuncu R oynarsa, T kesinlikle M'den daha iyidir. 2. Oyuncu R oynar mı? 2. Oyuncu ne oynar? Bu sorulara yanıt bulmak için, 1. Oyuncu oyuna 2. Oyuncu açısından bakar. Farkeder ki, 2. Oyuncu için diğer stratejilerden her koşulda daha iyi sonuç veren bir strateji yok. Mesela, eğer 1 B oynarsa R en iyi stratejidir, ama diğer durumlarda m'den daha kötüdür. Acaba 2. Oyuncu 1. Oyuncu'nun B oynayacağına inanabilir mi? 2. Oyuncu biliyor ki, yukardaki tabloya bakarak ve bunun her oyuncu tarafından bilindiğini bilerek 1. Oyuncu ödül beklentisini maksimize etmeye çalışmaktadır. O zaman anlar ki, 1. Oyuncu B oynamayacaktır. Dolayısı ile, 1. Oyuncu anlar ki, 2. Oyuncu R oynamayacaktır (m'den daha kötü olması sebebiyle). 2. Oyuncu'nun R oynama olasılığı ortadan kalkığında, 1. Oyuncu ödüllerine bakar ve anlar ki, M şimdi T'den daha iyidir, ne olursa olsun. Diğer taraftan, 2. Oyuncu benzer bir akıl

<sup>1</sup>Sonuçta, 1. Oyuncu M mevcutken 2. Oyuncu'nun kendisini B oynamaya teşvik edecek herhangi bir strateji oynayacağına dair bir inanca sahip olamaz.

yürüterek anlar ki 1. Oyuncu M oynar, dolayısı ile kendisi de L oynar.

**Alıştırma 1** *Yukarıdaki analizde, oyuncuların diğer oyuncuların akıl yürütme kapasiteleri hakkında istedikleri varsayımda bulunabildikleri kabul edilmiştir. Bu varsayımlar nelerdir? Eğer bu varsayımlar değiştirilseydi analiz nasıl değişirdi, mesela, eğer oyuncular rasyonel davranıp diğer oyuncuların rastgele bir strateji seçtiklerini varsaysalardı?*

Yukarıdaki analizde kullanılan mantık her zaman öyle net bir öngörü ortaya çıkartmaz. Farzedelim ki, bir arkadaşınızla iki buluşma yerinden birinde buluşmak istiyorsunuz ve her iki buluşma noktası arasında kayıtsızsınız. Maalesef, buluşana kadar arkadaşınızla irtibat kuramıyorsunuz. Bu durum alttaki *kordinasyon oyunu* denilen oyunda formelize edilmiştir.

(1)/(2)	Sol	Sağ
Üst	(1,1)	(0,0)
Alt	(0,0)	(1,1)

Burada 1. Oyuncu Üst ile Alt arasında seçim yapar, 2. Oyuncu ise Sol ve Sağ arasında seçim yapar. Her bir rakam sırasıyla 1. ve 2. oyuncuların von Neumann-Morgenstern faydalarıdır. 1. Oyuncu eğer 2. Oyuncu'nun Sol oynayacağını biliyorsa, Üst'ü Alt'a tercih eder, eğer 2. Oyuncu'nun Sağ oynayacağını biliyorsa Alt'ı tercih eder. 1. Oyuncu, eğer 2. Oyuncu'nun iki stratejisini de eşit olasılıklarla oynayacağını düşünüyorsa kendi iki stratejisi arasında kayıtsızdır. Benzer şekilde, 2. Oyuncu da 1. Oyuncu'nun Üst oynayacağını biliyorsa Sol'u Sağ'a tercih eder. Oyunun nasıl sonuçlanacağına dair net bir öngörü yoktur.

*Stabil* (istikrarlı), yle ki, hiçbir oyuncunun diğer oyuncuların kendine belirtilmiş stratejileri oynayacağını bildiği durumda başka stratejilere sapmaması ynyle stabil, sonuçlara (strateji profillerine) bakılabilir. Burada, Üst-Sol ve Alt-Sağ böyle sonuçlardır. Ancak, eğer Alt-Sol oynanacağı bilinseydi her oyuncu diğer stratejiye sapmak isterdi - alttaki tabloda gösterildiği gibi.

(1)/(2)	Sol	Sağ
Üst	(1,1)	$\Leftarrow \Downarrow$ (0,0)
Alt	(0,0)	$\Uparrow \Rightarrow$ (1,1)

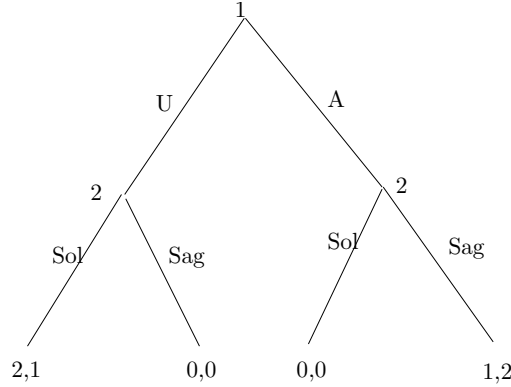
(Burada,  $\Uparrow$  1. Oyuncu'nun Üst'e sapacağı anlamına geliyor, vb.)

Bu oyundan farklı olarak, çoğunlukla oyuncular sonuçlar üzerine farklı tercihlere sahiptirler ve bu da bir çatışma yaratır. Cinsiyetler Savaşı diye bilinen alttaki oyunda çatışma ve kordinasyon isteği aynı anda mevcuttur.

(1)/(2)	Sol	Sağ
Üst	(2,1)	(0,0)
Alt	(0,0)	(1,2)

Burada, oyuncular Üst-Sol ve Alt-Sağ üzerinde bir kordinasyona varmak isterler. Ancak 1. Oyuncu Üst-Sol üzerinde anlaşmaya varmak ister, 2. Oyuncu ise Alt-Sağ üzerinde anlaşmaya varmak ister. Stabil sonuçlar önceki oyunda olduğu gibi Üst-Sol ve Alt-Sağ'dır.

Şimdi, Cinsiyetler Savaş oyununda farzedelim ki, 2. Oyuncu kendi eylemini seçmeden önce 1. Oyuncu'nun ne yaptığını öğreniyor. Bu durum alttaki oyun ağacı ile tasvir edilebilir.



Burada 1. Oyuncu Üst ve Alt arasında seçimini yapar, sonra (1. Oyuncu'nun ne seçtiğini öğrendikten sonra) 2. Oyuncu Sol ve Sağ arasında seçimini yapar. Açıktır ki, şimdi 2. Oyuncu eğer 1. Oyuncu Üst oynarsa Sol'u, eğer 1. Oyuncu Alt oynarsa da Sağ'ı seçer. Bunu bilen 1. Oyuncu ise Üst oynar. Dolayısıyla ile, bu oyunun tek mantıklı sonucu Üst-Sol'dur. (Bu tarz bir çözümlemeye *geriye doğru tümevarım* denir.)

2. Oyuncu diğer oyuncunun ne yaptığını görüyorsa sadece 1 kazanır, 1. Oyuncu ise o durumda 2 kazanır. (Önceki oyunda iki sonuç stabildi ve 2. Oyuncu birinde 1

diğerinde 2 kazanıyordu.) Bir başka deyişle, 2. Oyuncu 1. Oyuncu'nun kendisinin ne yaptığını bilmesini kendisinin 1. Oyuncu'nun ne yaptığını bilmesine tercih eder. Bir oyuncunun belli bir bilgiye sahip olup olmadığı ortak bilgi olduğunda, oyuncu bilgiye sahip olmayı tercih etmeyebilir - bu, değişik bağlamlarda göreceğimiz kuvvetli bir gerçektir.

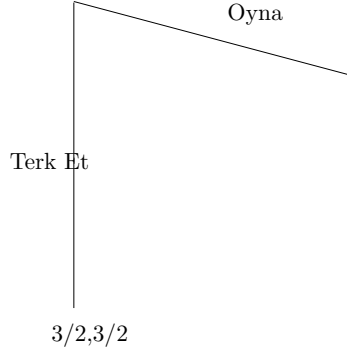
**Alıştırma 2** *Açıktır ki, bu 1. Oyuncu'nun 2. Oyuncu'un, sırası geldiğinde, 1. Oyuncu'nun ne yaptığını bileceğini bilmesinden kaynaklanmaktadır. Farzedelim ki, 1. Oyuncu 2. Oyuncu'nun 1. Oyuncu'nun ne yaptığını sadece  $\pi < 1$  olasılıkla bildiğine inanıyor olsun ve bu olasılık 1. Oyuncu'nun ne yaptığından bağımsız olsun. Mantıklı bir dengede ne olur? [Bu dersin sonunda, umuyoruz ki, bu durumu formalize edip dengeyi hesaplayabileceksiniz.]*

Bir başka yorumlama ise şöyledir: 1. Oyuncu 2. Oyuncu'yla iletişim kurabilirken, 2. Oyuncu 1. Oyuncu ile iletişim kuramıyordur. Bu 1. Oyuncu'ya kendi eylemlerine bağlı kalabilme yetisi sağlar ve bu da aralarında güçlü bir pozisyon almasını sağlar.

**Alıştırma 3** *Son oyunun sıradaki versiyonunu düşünün: 2. Oyuncu'nun ne yaptığını gördükten sonra 1. Oyuncu eylemini değiştirme şansı elde eder, sonra da oyun biter. Diğer bir deyişle, 1. Oyuncu Üst ve Alt arasında seçimini yapar, 1. Oyuncu'nun seçimini gören 2. Oyuncu Sol ve Sağ arasından seçimini yapar, 2. Oyuncu'nun seçimini gören 1. Oyuncu pozisyonunu değiştirip değiştirmeme kararı verir. Mantıklı sonuç nedir? Eğer eylemini değiştirmek 1. Oyuncu'ya  $c$  kadarlık bir faydaya mal olsaydı ne olurdu?*

Farzedelim ki, Cinsiyetler Savaşı oyununu oynamadan önce 1. Oyuncu için iki opsiyon var: oyundan çıkmak, bu durumda her iki oyuncu da  $3/2$  kazanacak, veya oyunu oynamak. Sırası geldiğinde 2. Oyuncu 1. Oyuncu'nun oyunu oynamayı tercih ettiğini bilecek.

İki tane mantıklı dengeden (stabil sonuç) bahsedebiliriz. Birinde 1. Oyuncu, oyunu oynarlarsa Alt-Sağ dengesini oynayacaklarını düşündüğünden oyundan çıkar ve sadece 1 kazanır. Diğerinde ise 1. Oyuncu oyunu oynamayı seçer ve oyunda Üst-Sol dengesini oynarlar.



	2	
1	Sol	Sag
Üst	2,1	0,0
Alt	0,0	1,2

İlk sonucun pek mantıklı olmadığı iddia edilebilir. Çünkü, 2. Oyuncu, sırası geldiğinde, 1. Oyuncu'nun oyunu oynamayı seçtiğini, dolayısı ile  $3/2$ 'den vazgeçtiğini biliyor olacak. O zaman farkedecek ki, 1. Oyuncu kesinlikle maksimum 1 getiren Alt stratejisini oynamayı planlamayacaktır. Yani, 2. Oyuncu, sırası geldiğinde, 1. Oyuncu'nun Üst oynamayı planlayacağını anlamalıdır, dolayısı ile Sol oynamalıdır. Bunu öngören 1. Oyuncu ise oyunu oynamayı seçmeli ve oyunda da Üst-Sol oynanmalıdır. Dolayısı ile, ikinci sonuç tek mantıklı sonuçtur. (Bu tarz bir çözümlemeye *ileri tümevarım* denir.)

Altta bazı oyun örnekleri verimmiştir:

### 1. Tutuklular ikilemi:

(1)/(2)	İtiraf Et	İtiraf Etme
İtiraf Et	(-1,-1)	(1,-10)
İtiraf Etme	(-10,1)	(0,0)

Bu oyun bir çoğunuzun bildiği ünlü bir oyundur. [Gibbons'da da anlatılır.] Bu oyunda, diğer oyuncu ne yaparsa yapsın, her oyuncu itiraf etmeyi tercih eder ve (0,0) tarafından domine edilen (-1,-1) sonucu çıkar.

### 2. Şahin-Güvercin oyunu

(1)/(2)	Şahin	Güvercin
Şahin	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$	$(V, 0)$
Güvercin	$(0, V)$	$(V/2, V/2)$

Bu, genel bir biyolojik oyundur, ancak ekonomi ve siyaset biliminde rastlanan bir çok oyuna çok benzer.  $V$  oyuncularından birinin kazanacağı kaynağın değeridir. Eğer kaynağı paylaşırlarsa, ikisi de  $V/2$  kazanır. Şahin "sert" strateji anlamındadır ve bu stratejiyi oynayan oyuncu kaynaktan vazgeçmez. Ancak, eğer diğer oyuncu da Şahin oynarsa savaşmak zorunda kalırlar ve  $C/2$  değerinde bir maliyet öderler. Diğer taraftan, Şahin oynayan bir oyuncu diğer oyuncu Güvercin oynarsa tüm kaynağı kendisi alır.  $V > C$  iken, oyun Tutuklular ikilemi oyununa dönüşür ve savaş sonucu doğar.

$V < C$  iken, savaş çok maliyetlidir ve oyun Rebel without a Cause filminden esinlenen Tavuk oyununa benzer. Tavuk oyununda iki oyuncu bir uçuruma doğru araba sürmektedirler ve durmak ve devam etmek arasında seçim yapmak zorundadırlar. İlk duran hayatta kalır ancak itibarını kaybeder. Daha genel olarak, "yıpratma (inatlaşma) savaşı" denilen oyun türleri bu tip durumları modellemek için kullanılırlar. Bu örnekte, bir oyuncu eğer diğer oyuncu Güvercin oynarsa Şahin oynamak ister, diğer oyuncu Şahin oynar ise Güvercin oynamak ister.

### 3. Bir yatırım oyunu:

(1)/(2)	Yatırım Yap	Yatırım Yapma
Yatırım Yap	$(\theta, \theta)$	$(\theta - c, 0)$
Yatırım Yapma	$(0, \theta - c)$	$(0, 0)$

Bu oyunda, iki oyuncu aynı anda yatırım yapma ya da yapmama kararı verirler; öyle ki, bir yatırım, diğer oyuncu da yatırım yaparsa daha değerlidir (koordinasyon oyunundaki gibi). Mesela, bir işçi adayını ve bir işvereni düşünelim, öyle ki işçi adayını eğitim alıp almama kararı (beşeri sermayeye yatırım yapmak) vermektedir ve işveren de beşeri sermaye gerektiren bir teknolojiye yatırım yapıp yapmama kararı vermektedir. ( $\theta$  ve  $c$ 'nin değişik değerleri için mantıklı sonuçlar nelerdir bir düşünün. Oyuncuların bu parametrelerin gerçek değerlerini bilmedikleri ama bazı öznel bilgiye sahip oldukları durumu nasıl analiz edersiniz?)