14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Sınav 1 Çözümleri

1. **1. sorunun çözümü**

   (a) 1. oyuncu her iki oyunda da aynı kazanç fonksiyonuna sahip, dolayısıyla 1. oyuncu açıkça aynı tercihlere sahip.

   Ya 2. oyuncu? Başka deyişle, 2. oyuncunun sağdaki oyundaki kazançları soldaki oyundaki kazançlarının, negatif olmayan afin bir transformasyonu mudur? Yine başka bir deyişle, öyle $a \geq 0$ ve b varmıdır ki, $0a + b = 0, 1a+b = 1, 4a+b = 3$ ve $2a+b = 2$ olsun? Ilk ikisini sağlamak için, $a = 1$ ve $b = 0$ olmalı, ancak bunlar 3. eşitliği sağlamazlar. Demekki, böyle bir transformasyon yoktur ve 2. oyuncu aynı tercihlere sahip değildir.

   (b) 1. oyuncunun sağdaki oyundaki kazançları soldaki oyundaki kazançlarının, negatif olmayan afin bir transformasyonu mudur? Başka bir deyişle, öyle $a \geq 0$ ve b varmıdır ki, $0a + b = 1, 6a + b = 4, 2a + b = 2$ ve $4a + b = 3$ olsun? Evet, bu eşitlikleri çözerek görebilirsiniz ki, $a = 1/2$ ve $b = 1$ öyle sayılardır.

   2. oyuncunun sağdaki oyundaki kazançları soldaki oyundaki kazançlarının, negatif olmayan afin bir transformasyonu mudur? Başka bir deyişle, öyle $a \geq 0$ ve b varmıdır ki, $1a + b = 0, 4a + b = 1, 7a + b = 2$ ve $-2a + b = -1$ olsun? Evet, bu eşitlikleri çözerek görebilirsiniz ki, $a = 1/3$ ve $b = -1/3$ öyle sayılardır.

   Evet her iki oyuncu da aynı tercihlere sahip.

2. **2. sorunun çözümü**

2. oyuncu için, M L'yi kesin domine eder. Rasyonel bir oyuncu olarak, 2. oyuncu asla L oynamaz. 2'nin rasyonel olduğunu bilen 1. oyuncu asla B oynamaz, çünkü indirgenmiş oyunda A B'yi kesin domine eder. Elimizde alttaki oyun kalır:

	M	R
A	4,1	1,0
C	2,0	2,2

Indirgenmiş oyunda, saf Nash dengeleri açıktır: (A,M) ve (C,R).

Şimdi de karma stratejilere bakalım. 1. oyuncu için $P(A) = p$ ve $P(C) = 1-p$, 2. oyuncu içinse $P(M) = q$ ve $P(R) = 1 - q$ olsun. O zaman bu olasılıkların sağlaması gerekenler

$$\begin{aligned} 4 * q + 1 * (1 - q) &= 2 \\ 1 * p + 0 * (1 - p) &= 0 * p + 2 * (1 - p) \end{aligned}$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} q &= 1/3 \\ p &= 2/3 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda, karma strateji Nash dengesi

$$\left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C,\ \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}R\right)$$

idir ve saf strateji Nash dengeleri de (A,M) ve (C,R)'dirler.

3. **3. sorunun çözümü**

(a) Geriye doğru tümevarım çözümü şöyledir. Önce, 2. oyuncunun sıralı rasyonel olduğunu varsayarak 2. oyuncu için x tarafından koşullu domine edilen y'yi eliyoruz. 1. oyuncunun da sıralı rasyonel olduğunu varsayarak r'yi eliyoruz. Bunun nedeni l'in r'ı koşullu domine etmesidir. Ikinci olarak, 2'nin sıralı rasyonel olduğunu ve 2'nin 1'in sıralı rasyonel olduğunu bildiğini varsayarak, b ve c'yi eliyoruz. Bunun nedeni, 1'in sıralı rasyonel olduğunu bilen 2. oyuncu 1'in r oynamayacağını bilir ve bu durumda b 0 getirirken, c oynamak 1 getirir. Sıralı rasyonel olduğundan, a oynamalı. Son olarak, (i) 1. oyuncunun sıralı rasyonel olduğunu, (ii) 1. oyuncunun 2. oyuncunun sıralı rasyonel olduğunu bildğini ve (iii)1'in 2'nin 1'in sıralı rasyonel olduğunu bildiğini bildiğini varsayarak L'yi eliyoruz. Bunun nedeni, (ii) ve (iii)'nin 1'in 2'nin a ve x oynayacağına kanaat getirmesini ve dolayısıyla da (i) sayesinde R oynamasını sağlamasıdır.

(b) 1. oyuncunun 4 stratejisi vardır, 2. oyuncununsa 6 (seçilecek eylemlerle adlandırılan).

	ax	ay	bx	by	cx	cy
Ll	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$
Lr	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$
Rl	$1,2$	$1,2$	$2,0$	$2,0$	$1,1$	$1,0$
Rr	$1,2$	$1,2$	$-1,4$	$-1,4$	$1,1$	$1,0$

(c) Rasyonelleştirilebilir stratejileri hesaplayın.

Ilk olarak, Ll ve Lr Rl tarafından kesin domine edilirler. 1'in rasyonel olduğunu varsayarak, Ll ve Lr oynamayacağı sonucuna varıyoruz. Ll ve Lr'yi eliyoruz ve indirgenmiş oyun alttaki halini alıyor

	ax	ay	bx	by	cx	cy
Rl	$1,2$	$1,2$	$2,0$	$2,0$	$1,1$	$1,0$
Rr	$1,2$	$1,2$	$-1,4$	$-1,4$	$1,1$	$1,0$

Şimdi, 2. oyuncu için cx ve cy ax tarafından kesin domine edilirler. (i) 2'nin rasyonel olduğunu ve (ii) 2'nin 1'in rasyonel olduğunu bildiğini varsayarak cx ve cy'yi eliyoruz. Bunun nedeni, (ii) sayesinde, 2 1'in Ll ve Lr oynamayacağını biliyoruz, dolayısıyla, (i) sayesinde de cx ve cy oynamaycaktır. Oyun alttaki haline indirgenir

	ax	ay	bx	by
Rl	$1,2$	$1,2$	$2,0$	$2,0$
Rr	$1,2$	$1,2$	$-1,4$	$-1,4$

Kalan oyunda başka kesin domine edilen strateji yoktur. Dolayısıyla, tüm kalan stratejiler rasyonelleştirilebilirdir.

4. **4. sorunun çözümü**

Ilk tur oylamanın galibine y diyelim (kanun tasarısı ya da değişiklik). Ikinci tur oylamada, 0.6 ile y arasında, Ilımlılar hangisi 0.5'e yakınsa ona oy verecekler; Demokratlar dah yüksek olan vergi oranına, Cumhuriyetçiler de düşük olan vergi oranına oy verecekler. Demokratlar ve Cumhuriyetçiler hep farklı vergi oranlarına oy verecekleri için, kazananı Ilımlıların neye oy verdikleri belirleyecek. Ikinci turun kazananını $f(y)$ olarak alttaki gibi tanımlayabiliriz

$$
\begin{aligned}
f(y) &= 0.6 \text{ eger } y > 0.6 \text{ veya } y < 0.4 \\
&= y \text{ eger } y \in [0.4, 0.6]
\end{aligned}
$$

Ilk tur için, ılımlılar, x_1 ve x_2'den ikinci turdaki sonucu 0.5'e en yakın yapacak olanı seçerler, yani, $argmin_{x\in\{x_1,x_2\}}|0.5-f(x)|$'i seçerler. Benzer şekilde, Demokratlar da $argmax_{x\in\{x_1,x_2\}}f(x)$'i seçerler. Cumhuriyetçiler de, $argmin_{x\in\{x_1,x_2\}}f(x)$'i seçerler. Ilk turda, Demokratlar ve Cumhuriyetçiler hep farklı tasarıları seçecekleri için, kazanan ılımlıların seçtikleri olacaktır, yani $y = argmin_{x\in\{x_1,x_2\}}|0.5 - f(x)|$. O zaman, x_1 veriliyken, Demokratların optimal x_2 seçimi $min\{0.6, 0.5+|0.5-x_1|\}$'dir, yani, eğer x_1 0.4'ten büyükse, x_2'yi olabildiğince büyük seçerler, 0.5'e x_1'in olduğundan daha yakın olacak şekilde (böylelikle ılımlılar x_2'yi desteklerler); aksi durumda 0.6 seçerler. O zaman, eğer Cumhuriyetçiler x_1'i

0.5’ten daha küçük seçerlerse, Demokratlar ılımlıların iki turda da destekleyecekleri daha yüksek bir vergi önerirler. Dolayısıyla, Cumhuriyetçilerin yapabileceklerinin en iyisi $x_1 = 0.5$ seçmektir.

Dolayısıyla, dengede üç oyuncunun stratejileri şöyledir: Cumhuriyetçiler ilk turda $x_1 = 0.5$ seçerler ve $argmin_{x \in \{x_1, x_2\}} f(x)$ için oy verirler, ikinci turda $min\{0.6, y\}$ için oy verirler. Demokratlar $x_2 = min\{0.6, 0.5 + |0.5 - x_1|\}$ seçerler, ilk turda, $argmax_{x \in \{x_1, x_2\}} f(x)$ için oy kullanırlar ve ikinci turda $max\{0.6, y\}$ için oy kullanırlar. Ilımlılarsa, ilk turda $argmin_{x \in \{x_1, x_2\}} |0.5 - f(x)|$ için, ikinci turdaysa $argmin_{z \in \{0.6, y\}} |0.5 - z|$ için oy kullanırlar.