14.12 Oyun Teorisi

Muhamet Yıldız

Güz 2005

Ödev 1

1. Alice New York'u ziyaret etmektedir. New Haven'da yaşayan arkadaşı Bob'u bir telefon kulubesinden arar ve Bob'un New York'a gelmesine ve tren istasyonunda buluşmaya karar verirler. Hangi tren istasyonunda buluşacaklarını kararlaştırmadan hemen önce Bob'un cep telefonunun pili biter ve artık haberleşemezler. Maalesef, New Haven'dan New York'a iki tane tren vardır: Penn istasyonuna gelen Amtrak treni ve Grand Central'a gelen MetroLiner treni, ki ikisi de tam öğleyin varırlar. Acıktır ki, Bob ya Amtrak trenine biner, ya MetroLiner trenine biner, ya da evde kalmayı tercih eder. Alice ise iiki tren istasyonundan sadee birini kontrol edebilir (ikisini birden değil). Ortak bilgidir ki, her ikisi de beklenen faydayı maksimize ederler ve tercihleri hakkında ?imdi sralayacaklarımız doğrudur. Ikisi de Bob'un Amtrak trenine bindiği ve Alice'in de Grand Central istasyonunu kontrol ettiği durum ile Bob'un MetroLiner trenine bindiği ve Alice'in de Penn istasyonunu kontrol ettiği durum arasında kayıtsızdirlar. Yani, buluşamamak eşit derecede kötüdür. Alice nerede buluştukları konusunda da kayıtsızdır. Alice için, Bob evde iken onu Penn istasyonunda beklemek buluşamamak kadar kötüdür. Ancak eğer Grand Central'da beklerse ve Bob evde ise daha kötü hissedecektir. Detaylandırırsak, Alice'in tercihleri öyledir ki, eğer Amtrak, MetroLiner ve evde kalmaya, sırasıyla, p, q, r olasılıkları atarsa, o zaman Penn istasyonunu Grand Central'a ancak ve ancak $p > q - r/2$ ise tercih eder. Eğer Bob evdeyse, Alice'in hangi istasyona baktığını umursamaz. Bob Amtrak'i MetroLiner'a tercih eder ancak ve ancak Alice'in Penn istasyonunda bekleme olasılığı en az

1/3 ise. Amtrak'i de evde kalmaya tercih eder eğer Alice'in Penn istasyonunda bekleme olasılığı en az 2/3 ise.

(a) Yukarıdaki durumu temsil eden ve oyuncuların lotaryalar üzerindeki tercihlerini de içeren normal biçimli bir oyun yazınız.

(b) Aynı durumu temsil eden başka bir çift kazanç fonksiyonu ikilisi bulunuz.

(c) Her iki oyuncunun da beklenen faydayı maksimize ettikleri ortak bilgisi altında, tüm olası sonuçları bulunuz.

2. Alttaki iki oyunculu yayvan bicimli oyunu düşünün.

(a) Bu oyunu normal biçimde yazın.

(b) Tüm rasyonelleştirilebilir stratejileri bulun.

(c) Tüm saf stratejili Nash dengelerini bulun.

(d) Tüm domine edilen stratejileri yinemeli olarak eleyin.

3. Bir üniversitede n tane öğrenci vardır. Aynı anda üniversitenin veri ağına veri göndermektedirler. $x_i \geq 0$ öğrenci i'nin gönderdiği verinin büyüklüğü olsun. Her öğrenci i, x_i'sini kendi seçer. Ağın hızı toplam veri büyüklüğüyle ters orantılıdır, dolayısıyla bir mesajı yollamak $x_i t(x_1, ..., x_n)$ dakika alır, öyle ki,

$$t(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n \tag{1}$$

Öğrenci i'nin kazancı

$$x_i - x_i t(x_1, .., x_n) \tag{2}$$

idir.

(a) Bu oyunun Nash dengesini hesaplayın.

(b) Şimdi yeni bir program kullanalım, öyle ki, her öğrenciye sabit bir M miktarı ödeyelim ve her bir birim veri içinse p fiyatı talep edelim. O zaman bir öğrencinin kazancı

$$M + x_i - x_i t(x_1, .., x_n) - px_i \tag{3}$$

olur.

i. Bu yeni program altında Nash dengelerini hesaplayın.

ii. Diyelimki dengede sıfır kar yapmak istiyoruz; yani, $M = p(\bar{x}_1(M,p) + ... + \bar{x}_n(M,p))/n$, öyle ki, $\bar{x}_i(M,p)$ öğrenci i'nin bu program altında dengedeki veri ebadıdır. Öğrencilerin dengedeki kazançlarını maksimize eden M ve p'yi hesaplayınız.

iii. Kısaca bulgularınızı açıklayınız.

4. Bu problemdeki mekanizma, oyun teoriciler David Gale ve Lloyd Shapley tarafından tasarlanmış olup, öğrencileri okullarla eşleştirme ya da doktorları hastanelerle eşleştirme gibi birçok uygulamada kullanılmıştır. n tane adayımız ve n tane de pozisyonumuz (işveren) var. Her aday i pozisyonlar üzerine kesin bir tercihe sahip olup, tercihler $(p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{in})$ şeklinde en iyiden en kötüye doğru sıralanmıştır. Her pozisyon j'nin de adaylar üzerine kesin bir tercihi olup, bu tercihler $(c_{j1}, c_{j2}, ...c_{jn})$ şeklinde en iyiden en kötüye doğru sıralanmıştır. Pozisyonların tercihlerini biliyoruz ancak adayların tercihlerini bilmiyoruz ve bunları ortaya çıkarmamız gerekiyor, adayları ve pozisyonları verimli bir biçimde eşleştirebilmek için. Her aday aynı anda pozisyonlar icin bir sıralama, $\hat{p}_{i1}, \hat{p}_{i2}, ..., \hat{p}_{in}$, bildirir, ki bu sıralama adayın kendi gerçek sıralamasından potensiyel olarak farklı olabilir. Daha sonra, adayları ve posizyonları eşleştirmek için şu mekanizmayı kullanacağız. Önce her aday i'yi bildirdiği sıralamadaki en iyi pozisyonuna *başvuran* olarak atıyoruz. Her pozisyon j için, j'ye başvuranlar arasından j'nin en çok tercih ettiği adayı j'nin *nişanlısı* olarak seçiyoruz ve diğer başvuranları j'den reddediyoruz. Eğer reddediliş aday varsa, bir sonraki turda, bu tip her aday i'ye, bildirdiği ikinci en iyi posizyona, yani $\hat{p}_{i2}$'ye atıyoruz, başvuran olarak. Bir posizyonun önceki turdan gelen nişanlısını da o posizyona başvuran bir aday olarak değerlendiriyoruz. j'nin kendisine başvuranlar arasından (önceki turdan gelen nişanlısını da katarak) en çok tercih ettiği adayı yeni nişanlısı olarak seçiyoruz ve diğerlerini j'den reddediyoruz. Bu şekilde reddedilmiş aday kalmayana dek devam ediyoru. (Bu mekanizmanın n ya da daha az sayıda turda duracağı gösterilmiştir.) Mekanizma her pozisyonda bir aday olduğunda durur ve adayları o an eşleştirildikleri pozisyonlara atarız. Adaylar arasında oynan oyunu

düşünelim, öyle ki, stratejiler bildirilen sıralamalar olsun.

(a) $n = 3$ olsun. Gösterin ki, her aday i için doğru tercih sıralamasını $(p_{i1}, ..., p_{in})$ bildirmek dominant bir stratejidir.

(b) (Bonus) Doğru tercih sıralamasını bildirmenin her aday için dominant strateji olduğunu gösterin.