1. Buluşsal Yöntemler (Heuristics): ε'un normalliği nereden gelmektedir?

Poincare: "Herkes *Gauss*'un hata yasasına (law of error) inanmaktadır; deneyciler bunun bir matematik teoremi olduğunu düşündükleri için, matematikçiler ise deneysel bir olgu olduğunu düşündükleri için."

Gauss (1809) enküçük karelerin ençok olabilirlik tahmini olduğu bir hata dağılımı oluşturmak için geriye dönük çalışmıştır. Bu nedenle, normal dağılıma bazen Gausçu da (Gaussian) denmektedir.

Merkezi Limit Teoremi (MLT, Central Limit Theorem, CLT)"ispatı": De-Moivre-Laplace, Liapunov, Levy, Khinchin ve Lindeberg (burada Gauss yoktur):

Ekonometride, Haavelmo, 1944'teki *Econometrica*'da yayınlanan "Probability Approach to Econometrics (Ekonometriye Olasılık Yaklaşımı)" makalesinde, bu ispatın seçkin bir destekçisi olmuştur.

MLT ispatında, her bir hata ε_i'nin büyük sayıdaki küçük ve bağımsız basit (elementary) hatalar olan v_j'nin toplamı olduğu düşünülür, bu sebeple de bu hatalar merkezi limit teoremi ışığında yaklaşık olarak Gausçu'dur.

Eğer basit hatalar olan $v_j, j = 1, 2, ...$ sıfır ortalamalı, özdeş ve bağımsız dağılımlı (i.i.d., identically and independently distributed) ise ve $E[v_{ij}^2] < \infty$ ise, o zaman *büyük* N için

$$\varepsilon_i = \sqrt{N}\left[\frac{\sum_{j=1}^{N} v_j}{N}\right] \approx_d N(0, Ev_j^2),$$

bu MLT'den elde edilmektedir.

Ancak, eğer basit hatalar v_j iid ve simetrik iseler ve $E[v_j^2] = \infty$ ise, o zaman *büyük* N *için* (v_j'nin kuyruk (tail) hareketlerine getirilecek ek teknik kısıtlar ile)

$$\varepsilon_i = N^{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{\sum_{j=1}^{N} v_j}{N}\right] \approx_d \textit{Kararlı (Stable)}\text{'dır}$$

burada α en büyük sonlu beklemdir (finite moment): $\alpha = \sup\{p : E|v_j|^p < \infty\}$. Bu da Khinchine ve Levy tarafından ispat edilen MLT'nden gelmektedir. Kararlı dağılımlar aynı zamanda toplam-kararlı (sum-stable) ve *Pareto-Levy* dağılımları olarak da adlandırılırlar.

Simetrik kararlı dağılımların yoğunlukları "çan eğrisi şeklindedir" ve yaklaşık olarak güç fonksiyonları (power functions) gibi hareket eden kalın kuyruklara (thick tails) sahiptirler; kuyruklarda $\alpha < 2$ ile $x \mapsto \text{sabit} \cdot |x|^{-\alpha}$'dır.

Başka bir ilginç ek gözlem: Eğer $\alpha > 1$ ise, örneklem ortalaması olan $\sum_{j=1}^{N} v_j/N$ bir yakınsayan istatistiktir (converging statistic), eğer $\alpha < 1$ ise örneklem ortalaması olan $\sum_{j=1}^{N} v_j/N$ ıraksayan bir istatistiktir (diverging statistic).

Referanslar: Embrechts et al. *Modelling Extremal Events (Uç Olayları Modelleme).*