

1. Doğrusallık ve Yansızlık: Bu problem sizleri doğrusallığın ve yansızlığın manaları hakkında düşündürmekte ve aynı zamanda “etkileyici” cebirsel beceri kazandırmaktadır. Şu regresyon modeline bakınız.

$$y_t = x_t' \beta + \varepsilon_t, (t = 1, 2, \dots, T) \quad (1)$$

burada $E[\varepsilon|x] = 0$ ve $E[\varepsilon\varepsilon'|x] = \sigma^2 I$ olsun. $\bar{x} \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$ olsun ve \bar{y} de benzer şekilde tanımlansın.

a) Şu tahminciyi değerlendiriniz: $\hat{\beta} \equiv \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$. $\hat{\beta}$ 'nin doğrusal ve yansız olduğunu

gösteriniz. Şimdi de varyansını hesaplayınız ve bunu OLS varyansı ile karşılaştırınız. Varsayalım mikro veri ile çalışıyorsunuz ve bireysel veriyi elde edemezken sadece grup ortalamalarına sahipsiniz. Bir önceki sonuç size ne ifade etmektedir? (Bu düşüncenin bir uygulaması olarak şu çalışmaya bakınız: Josh Angrist, “Estimating the Labor Market Impact of Voluntary Military Service Using Social Security Data on Military Applicants,” *Econometrica*, 1998.

b) Varsayalım örneklemeden sadece ilk $\tau < T$ gözlemi kullanmaya karar verdiniz ve OLS uygulayacaksınız. Yeni tahminci olan $\tilde{\beta}$ 'nin doğrusal ve yansız olduğunu ama en küçük varyansa sahip olmadığını gösteriniz.

c) En küçük varyansa sahip olan ama yansız olması gerekli olmayan bir tahminci öneriniz (İpucu: cevabı bulduktan sonra bu sorunun biraz hileli olduğunu düşünebilirsiniz).

2. Küresellik (sphericity) varsayımının çığnenmesi: Bu soruda küreselliğin bulunmadığı durumda ne olduğunu göreceksiniz.

Şu regresyon modeline bakınız

$$y_t = x_t' \beta + \varepsilon_t, (t = 1, 2, \dots, T) \quad (2)$$

burada $E[\varepsilon|x] = 0$ ve $E[\varepsilon\varepsilon'|x] = \Sigma$ ve Σ bir pozitif tanımlı bir matris olsun. $\hat{\beta}$ ise β 'nin OLS tahmincisi olsun.

a) $\hat{\beta}$ yansız mıdır? Tahmincinin kovaryans matrisini hesaplayınız.

b) a sabit bir $K \times 1$ boyutlu vektör olsun. Bu durumda $a' \hat{\beta}$, $a' \beta$ için yansız bir tahminci midir? $\text{var}(a' \hat{\beta})$ 'i hesaplayınız.

3. 14.381 Bölüm I ders içeriklerinin tekrarı ve bilmeniz gereken bazı önemli çıkarımlar:

a) İspat ediniz: Eğer $Z \sim N(\mu, \Sigma)$ ve A sabit, elverişli (conformable) bir matris ise, o zaman

$$AZ \sim N(A\mu, A\Sigma A')$$

Dikkat ediniz: bu soruda üç bölüm vardır: AZ 'nin ortalamasının $A\mu$, varyansının $A\Sigma A'$ olduğunu ve AZ 'nin normal dağılımı olduğunu gösteriniz. Bu sorunun normallik kısmı çok zordur; tersi alınabilir bir A için veya a ve z skalarları için de gösterilebilir.

- b) İspat ediniz: Eğer $Z \sim N(0, I)$ ve A simetrik ve denkgüçlü bir matris ise, o zaman $Z'AZ \sim \chi^2_j$ 'dir; burada $J=kerte(A)$ 'dir.
- c) P_X , ders notlarında tanımlandığı gibi X -projeksiyon matrisi olsun ve $M_X=I-P_X$ ise ilgili sonlandırıcı (annihilator) matrisi olsun. Şunu ispat ediniz:
 $kerte(P_X)=K$ ve $kerte(M_X)=N-K$
- d) Bağımsızlık ve ilgisizlik.
 1. İspat ediniz: iki rastsal vektör bağımsız ise, ilgisizdirler.
 2. Tersini için bir karşı örnek veriniz. Yani, bağımsız olmayan iki ilgisiz rastsal değişken için örnek veriniz. İsterseniz tek boyutlu rastsal değişkenler kullanabilirsiniz.
 3. Tersinin birlikte normal olan rastsal vektörler için geçerli olduğunu ispat ediniz. Yani, eğer X ve Y birlikte normal dağılıyorsa ve ilgisiz ise, o zaman X ve Y bağımsızdır (İpucu: bağımsızlığın tanımına tekrar bakınız ve birlikte normal olan rastsal vektörlerin birlikte dağılım formülüne dikkatle bakınız).
- e) $X_n \sim t(n)$ olsun ve $X \sim N(0,1)$ olsun.
 İspat ediniz: $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{d} X$ 'dir.

İpucu: $t(n)$ 'nin tanımını yazınız. Rastsal değişken X_n^2 ve rastsal değişken X_1^2 arasındaki ilişki nedir? X_1^2 rastsal değişkeninin manasına bakınız. Büyük Sayılar Kanunu'nun "derin" manasını da dikkatle hatırlayınız.

- f) GM1-5 altında ispat ediniz:

1. $\hat{\beta} | X \sim N(\beta, V)$, burada $V = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ 'dir.

$E[\hat{\beta} | X] = \beta$ ve $V[\hat{\beta} | X] = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ olduğunu şu varsayımı kullanmadan

da ispat edebiliştik: $GM5: \varepsilon | X \sim N(0, \sigma^2 I)$. O zaman neden hala bununla uğraşıyoruz?

2. $(\hat{\beta}_j - \beta) / \sqrt{\hat{V}_{jj}} \sim N(0,1)$. Bu sonuç neden tek başına çok faydalı değildir?

3. $\frac{(N-K)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-K}$

4. $\hat{\beta}$ ve S^2 bağımsızdır.

Neden bu sonuç bu kadar şaşırtıcıdır? (Borat türü soru)

Çözdüğünüzde neden bu kadar apaçıktır? (İpucu: bir önceki sorunun cevabıyla aynı.)

Neden bu kadar önemlidir?

Varsayımlarımıza ne kadar dirençlidir?

5. $(\hat{\beta}_j - \beta) / \sqrt{\hat{V}_{jj}} \sim t_{N-K}$; burada \hat{V}_{jj} , $\hat{V} = S^2 (X'X)^{-1}$ 'in jj 'inci elemanıdır.

Dikkat ederseniz, şunu yazmak biraz tehlikelidir: $\hat{V}_{jj} = S^2 (X'X)^{-1}_{jj}$

Şu ifade doğrudur: $\hat{V}_{jj} = S^2((X'X)^{-1})_{jj}$, ancak şu doğru değildir $\hat{V}_{jj} = S^2((X'X)_{jj})^{-1}$ (farkı görebiliyor musunuz?) ve $\hat{V}_{jj} = S^2(X'X)_{jj}^{-1}$ ifadesini kullandığınızda hangisini kastedtiğiniz net değildir. Ne var ki, karışık olmasına rağmen standart notasyon budur. Bir dakika: Aynı durumla bölüm (2)'de de karşılaşmıştık ve serbestlik derecesi ya da başka bir hususu dert etmemiştik. Bu sonuçta böylesine ilginç olan nedir? Neden bölüm (3) ve (4)'teki matematik ile uğraştık?

4. Ters Regresyon (Reverse Regression):

Şu iki regresyonu değerlendiriniz:

$$y_i = \alpha + x_i\beta + u_i \quad (3)$$

$$x_i = a + y_ib + v_i \quad (4)$$

burada $t=1, 2, \dots, T$ ve $E[u|x] = 0, E[v|y] = 0, E[uu'|x] = \sigma_u^2 I, E[vv'|y] = \sigma_v^2 I$ olsun.

Model 3'te β için $\hat{\beta}$ OLS tahmincisi ve Model 4'te b için \hat{b} OLS tahmincisi olsun.

- Varsayalım $\hat{\beta} > 0$ şeklinde buldunuz. $\hat{\beta}$ ve \hat{b} 'yi karşılaştırınız. Dikkat ediniz: Bu problemi α ve a 'yı modellerin dışında bırakarak daha rahat çözebilirsiniz. Ancak bunu yaparsanız sebebini belirtmeniz gerekir.
- Her modelin tahmininden elde ettiğiniz R^2 'leri karşılaştırınız.

5. Simulasyon ve Önsav Sınaması: Burada simule edilmiş bir regresyon modelinden bir önsav sınaması yapacaksınız ve gözlemsel reddetme yüzdesini ilgilendiğiniz test büyüklüğü (size of the test) ile karşılaştıracaksınız. Burada kanonik bir modelde ikisinin çok yakın şekilde eşleştiğini bulacaksınız. Ancak, GM varsayımlarının ihlal edildiği durumlara baktığınızda durum sıkça değişecektir. Simulasyonlar, test etmeyi düşündüğünüz durumu test edip etmediğinizi görmemiz için iyi bir imkan sunmaktadır. Bunun iyi bir örneği Bertrand, Duflo, Mullinathan'ın "How Much Should We Trust Differences-in-Differences Estimates" (QJE, 2004) çalışmasında yer almaktadır.

Ödev 5'in 6'ncı sorusunun bilgisayar kodunu kullanarak (Matlab veya başka bir programlama dili kullanabilirsiniz) her bir iterasyon ve I değeri için, $\beta = 2$ önsavını $\alpha = 0.05$ büyüklüğü için test ediniz. Reddedtiğiniz durumların sayısını kaydediniz. Reddetme yüzdeniz α ile nasıl karşılaştırılmaktadır? Bu I 'ye bağlı olarak değişmekte midir?

İpuçları:

- Reddetme durumlarını kaydederken toplamları 1 ve 0'lardan oluşan bir vektör ile veya bir sayaç ile kaydedebilirsiniz.
- Örneklem büyüklüğü I 10 olduğunda Student t dağılımı için kritik değer 1.96 değildir. Matlab kullanıyorsanız " $tinv(1 - \frac{\alpha}{2}, n)$ " komutu ile t dağılımının kritik değerlerini elde edebilirsiniz. Burada α iki taraflı testin büyüklüğünü ve n de örneklem büyüklüğü temsil eder.
- Matlab'e girişteki örnek kodu kullanabilirsiniz.
- Bir önceki ödevde kullandığımız koda yaklaşık olarak altı satırlık kod eklemeniz gerekmektedir.

6. Basit Regresyon Testi ve STATA'ya Hoşgeldiniz. Bu problem sizden bir üretim fonksiyonunun parametrelerini tahmin etmenizi ve bunlarla ilgili önsav sınavı yapmanızı istemektedir. Burada önemli olan husus regresyonun ve yaptığınız testlerin manasını düşünmenizdir. Soruları çözerken STATA ya da herhangi bir yazılımı kullanabilirsiniz. Ödevlerinizi teslim ederken sonuçlarınızın bir çıktısını ve soruları cevaplarırken ne yaptığınızı anlatan açıklamaları veriniz; kullandığınız bilgisayar komutlarını belirtmeniz de faydalı olacaktır.

Verisetinizde birincil metaller endüstrisinde (SIC 33) faaliyet gösteren 27 firmaya ait çıktı (üretim, output-Q), işgücü (labor-L) ve sermaye (capital-K) bilgisi yer almaktadır. Her gözlem bir firmayı temsil etmektedir. Veriseti dersin sayfasında yer almaktadır. Veriyi hem bir txt dosyası (dataPset6Qn6.txt) hem de STATA veri dosyası (dataPset6Qn6.dta) olarak bulabilirsiniz. Hangisini tercih ederseniz kullanabilirsiniz.

a) Şu şekildeki bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonunu tahmin ediniz

$$\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \ln L_i + \beta_3 \ln K_i + \varepsilon_i$$

b) Ölçeğe göre sabit getiri varsayımını test ediniz. Hangi seviyede reddedebiliyorsunuz? STATA'da *test* komutunu kullanabilirsiniz.

c) Translog modeli şu şekilde verilmiştir:

$$\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \ln L_i + \beta_3 \ln K_i + \beta_4 \frac{\ln^2 L_i}{2} + \beta_5 \frac{\ln^2 K_i}{2} + \beta_6 \ln L_i \ln K_i + \varepsilon_i$$

Bu model, Cobb-Douglas ile karşılaştırıldığında daha fazla esnekliğe sahiptir ve üretim fonksiyonlarının görgül tahmininde sıkça kullanılmıştır. Verisetinizi kullanarak bir Translog üretim fonksiyonu tahmin ediniz.

d) Translog modele uygulayacağınız hangi kısıtlar Cobb-Douglas modelini geri vermektedir? Bu kısıtları test ediniz. Hangi seviyede reddedebiliyorsunuz?

e) Translog modelinde, örnekleme (c) şikkında hesapladığınız değerler ile sermaye çıktı elastikiyetindeki ortalama değer, $\frac{\partial \ln Q_i}{\partial \ln K_i}$, nedir?

f) $\ln K_i$ ve $\ln Q_i$ arasındaki ilişkiyi hesaplayınız. (a) şikkında tahmin ettiğiniz Cobb-Douglas modelinde sermayenin çıktı üzerindeki etkisi nedir? Bu iki cevabın neden aynı olmadığını basitçe açıklayınız.

g) (a) şikkındaki Cobb-Douglas modelinde, gelir dağılımı hipotezine bağlı olarak, β_2 'nin emeğin brüt hasıllattaki payının 0.80'e eşit olduğunu sınavınız.

h) Ek soru: Güç Eğrileri (Power Curves). Eğer gerçek β_2 'nin değeri 0.80 olsaydı, yukarıdaki testte kaç kere reddetmeniz gerekirdi? Değer 0.60 olsaydı ne olurdu? Büyüklüğü %5 olan sınama için $H_0 : \beta_2 = 0.80$ 'i reddetme ihtimalini β_2 'nin bir fonksiyonu olarak çizin.