

1. β için OLS Tahmininin Çıkarımı: Bu problem $\hat{\beta}$ 'yi "uykunuzda" dahi çıkartabilmeniz için gerekli bilgileri içermektedir. Bu sonuçları başka bir kaynaktan kopyalamanız da mümkündür, ancak burada kendinizin çözmesi daha sonrası için çok faydalı olacaktır.

- OLS neyi minimize etmeye çalışmaktadır? Kısaca bunun neden iyi ya da kötü bir fikir olabileceğini açıklayınız.
- "En iyi doğrusal öndeyici" ne demektir?
- Varsayalım şu regresyon denklemi verilmiştir: $y = X\beta + \varepsilon$. OLS tahmini olan $\hat{\beta}$ 'yi şu şekilde çıkartınız
 - Toplam sembolü ile, ve
 - Matris notasyonu ile.

2. Regresyon katsayılarının yorumu: Bir sunumda sonuçların " β_1 'in değeri 0.08 standart hata ile 0.2 olarak çıkmakta, β_2 ise 1.4..." şeklinde ifade edildiğini dinlemek üzücüdür. Ekonometrinin amacı veriniz hakkında birşeyler söyleyebilmektir. Bu soruda, çok şey ifade etmedikleri kabul edilebilecek sayılar hakkında bir yorumda bulunmak için fırsatınız olacak.

Varsayalım şu regresyonu yaptınız:

$$G_i = \beta_1 + \beta_2 \text{gelir}_i + \beta_3 \ln \text{benzinfiyat}_i + \beta_4 \text{yeniaraba}_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

burada G_i birey i 'nin benzin tüketimi, benzinfiyat_i yaşadığı yerdeki benzin fiyatı ve yeniaraba_i ise yeni bir arabaya sahip olup olmadığını temsil eden bir kukla değişkendir. Varsayalım β 'yi şu şekilde tahmin ettiniz: [2.1, 0.01, -0.1, -150.2]. Her bir katsayıyı bir cümlede kullanınız (örneğin β_3 'ün katsayısı şunu ifade eder: benzin fiyatı ... kadar değiştiğinde tüketiciler benzine ... kadar daha az/fazla harcarlar). Log katsayıları yorumlarken kısmi türevlerin alınmasını $\beta_3 = \partial G / \partial \ln \text{benzinfiyat}_i$ şeklinde düşünebilirsiniz.

Eğer model şu şekilde oluşturulsaydı, ne değişirdi?

$$\ln G_i = \beta_1 + \beta_2 \text{gelir}_i + \beta_3 \ln \text{benzinfiyat}_i + \beta_4 \text{yeniaraba}_i + \varepsilon_i \quad (2)$$

3. İzdüşüm ve Kalıntı Matrisleri: Bu matrisleri sürekli kullanacaksınız, dolayısıyla bu matrislerle çalışmaya alışmanız gerekmektedir.

Şunları tanımlayınız: $P \equiv X(X'X)^{-1}X'$ ve $M \equiv I - P$

- P geometrik olarak ne ifade etmektedir (ipucu: P neyi temsil eder)? Peki ya M ?
- P ve M 'nin simetrik ve dengeli olduğunu gösteriniz. PM nedir?
- Varsayalım şu model verilsin:
$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

Şunları tanımlayınız: $P_j \equiv X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'$ ve P 'yi yukarıdaki gibi ve $X = [X_1 : X_2]$.
 P_1P nedir? M_1M nedir? P_1X_1 nedir? M_1X_1 nedir? Bu sonuçlar sezgisel olarak anlamlı mıdır (a'ya verdiğiniz cevapları düşününüz)?

4. Bölüntülü Regresyon: Sadece bir kez bölüntülü regresyonda β 'yi çözmek için gerekli işlemleri yapmalısınız. Bu sadece sınav soruları için bir gereklilik değil, başka yerlerde kullanabileceğiniz matris işlemleri için de faydalıdır. Burada cevabın ne olduğunu biliyorsunuz, ayrıca bu işlemler mesleğinde ilerleyen bir ekonometricinin "Cesaret Rozetidir."

Şu modeli değerlendiriniz:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (3)$$

$n \times 1 \quad n \times (k_1+k_2) \quad (k_1+k_2) \times 1 \quad n \times 1$

Burada X 'i $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ nxk_1 & nxk_2 \end{bmatrix}$ ve β 'yi $\begin{bmatrix} \beta_1' & \beta_2' \\ 1xk_1 & 1xk_2 \end{bmatrix}$ şeklinde ayrıştırabiliriz. Bu durumda, regresyon şu şekilde yazılabilir:

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \quad (4)$$

Şunu tanımlayalım: $P_j \equiv X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'$, bu bizim eski dostumuz X_j üzerine olan izdüşüm matrisidir ve $M_j \equiv I - P_j$ 'dir. Şunları gösteriniz:

a) Normal denklemler (OLS için birinci derece koşulları) şunlardır

$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\hat{\beta}_2 = X_1'y \quad (5)$$

$$X_2'X_1\hat{\beta}_1 + X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X_2'y \quad (6)$$

Bazı faydalı ipuçları şunlardır: (1) bir skaların devriği skalara eşittir (bariz ama faydalıdır), (2) $\partial Ax/\partial x = A'$.

b) $\hat{\beta}_2 = (\tilde{X}_2'\tilde{X}_2)^{-1}\tilde{X}_2'\tilde{y}$, burada $\tilde{X}_2 \equiv M_1X_2$ ve $\tilde{y} \equiv M_1y$ 'dir.

1. Öncelikle, bu forma sahip regresyonun ne yaptığını yorumlayınız. Yani, eğer tek bağımsız değişkenli bir model kullansaydık, hangi değişkeni hangi değişken üzerine regresyona tabi tutardık?

2. İkinci olarak, (b) şikkını normal denklemleri çözerek gösteriniz (İpucu: (5)'i

$X_1\hat{\beta}_1$ için çözmeye çalışın ve M_1 'in simetrik ve denkgüçlü olduğu bilgisini kullanın).

3. Son olarak, matrisin tersini almanın ürkütücü matematiğini çalışalım (daha önce de belirtildiği gibi, bunu hayatınızda bir kez yapmanız yeterlidir). Bunun formülü Greene'in kitabında beşinci baskıda sayfa 824'teki A-74'tür (Greene'in Appendix A kısmı matris cebiri için çok iyi bir kaynaktır).

5. Kübik Kama Yaklaşıklığı: Kübik kama şu forma sahiptir:

$$x_i = f(w_i) = (1, w_i, w_i^2, w_i^3, (w_i - t_1)_+, \dots, (w_i - t_r)_+^3)'$$

Herhangi bir $(r+4) \times 1$ boyutunda b vektörü için, $f(w_i)$ 'b ifadesi w_i 'ye göre kaç tane sürekli türeve sahiptir?

6. Monte Carlo: Bu ders boyunca Monte Carlo simulasyonları, yapılan çalışmalara yönelik sezgi sahibi olmak amacıyla oluşturulacaktır. Matlab, Stata, Gauss, Mathematica ya da başka bir yazılım kullanabilirsiniz. Bu problemin amacı OLS'in mekanizmasını yazılımdaki komutlara bağlı olmadan görmek ve sizi simulasyon ile tanıştırmaktır.

Şu modeli değerlendiriniz:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i \quad (7)$$

burada x_i tekdüze (uniform) olarak $[1,5]$ üzerinde dağılmaktadır, ε_i 'nin dağılımı $N(0,1)$ 'dir ve $i=\{1, \dots, I\}$ 'dir. Varsayalım β 'nin gerçek değeri 2 olsun. Aşağıdaki işlemleri 1000 kez tekrarlayınız:

- $I=10$ olsun ve (7)'den 10 tane gözlem oluşturun. Rastsal sayı yaratıcısı (random number generator) kullanarak iid rastsal değişkenler olan x ve ε için 10×1 vektörleri oluşturun ve sonra y 'yi elde edin.
- $\hat{\beta}$ ve $s^2(X'X)^{-1}$ 'yi hesaplayın. Sonuçları 1000×2 'lik bir matriste (ya da 2 tane 1000×1 'lik vektörde) saklayın.
- Sonuçlarınızı hem $\hat{\beta}$ hem $\text{var}(\hat{\beta})$ için herbiri eşit mesafedeki (seçiminize bağlı olarak 25 ya da 51 bin) iki histogramda çizin.

Bu çalışmayı $I=100, 1000$ ve $100,000$ için tekrar edin. Büyük örneklemelerin gücünü takdir edin ve sonuçlarınızı gelecek ödev için saklayın.

7. Yaklaşıklık Örneği: Aşağıdaki tablo eğitim (e , education) verildiğinde ücretin (w , wage) koşullu ortalamasını göstermektedir $E[w|e]$:

$E[w e]$	5.84	5.94	5.97	6.08	6.24	6.41	6.45	6.76	6.57	6.88	7.31	6.98
e	8	9	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20

Tutumlu (parsimonious) bir işlevsel form $x = f(e) : R \rightarrow R^K$ 'yi en iyi şekilde bulmaya çalışın; burada sabit bir $K \times 1$ boyutlu b vektörü için $x'b$ ifadesi $E[w|e]$ 'i yaklaştırsın. Önerdiğiniz x 'in boyutu 8'den büyük olmasın, yani $K \leq 8$ olsun. Kök ortalama kare yaklaşıklık hatasını (RMSAE) ve en çok yaklaşıklık hatasını (MAE) hesaplayın ve gösterin.