14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Ders Notları 10

Konrad Menzel

12 Mart 2009

1. 2 veya Daha Fazla Rasgele Değişkenin Fonksiyonları

2 veya daha fazla rasgele değişkenin birleşik dağılımı hakkında hâlihazırda öğrendiklerimizi tekrarlayalım. Diyelim ki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ var,

- Eğer $X_1, \ldots, X_n$ kesikli ise, onların birleşik p.d.f.'si

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$$

ile verilir.

- Eğer $X_1, \ldots, X_n$ sürekli ise, onların birleşik p.d.f.'si pozitif bir fonksiyondur, $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$, bu nedenle herhangi bir $D \subset \mathbb{R}^n$ için

$$P\Big((X_1,\ldots,X_n) \in D\Big) = \int_D \cdots \int f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

- $X_1, \ldots, X_n$ bağımsızdır eğer aşağıdaki sağlanırsa

$$P(X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)\cdot\ldots P(X_n \in A_n)$$

  Bunun aşağıdakine eşit olduğunu hatırlayınız,

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdot\ldots f_{X_n}(x_n)$$

Şimdi yukarıda tartışılan tek değişkenli durumdan nasıl 2 veya daha fazla boyuta geneleme yapacağımıza bakalım.

Tek boyutlu durumda olduğu gibi yine üç durumu ayırt edeceğiz:

1. İlgili değişken $X_1, \ldots, X_n$ kesiklidir
2. İlgili değişken $X_1, \ldots, X_n$ süreklidir
3. X süreklidir ve $u(X_1, \ldots, X_n)$ n-boyutlu bire-bir bir fonksiyondur.

1.1. Kesikli Durum

Varsayalım ki $X_1, \ldots, X_n$ birleşik yoğunluğu p.d.f. $f_{X1, \ldots, Xn}(x_1, \ldots, x_n)$ ile kesiklidir ve $Y_1, \ldots, Y_m$ m tane fonksiyon ile veriliyor

$$\begin{aligned} Y_1 &= u_1(X_1, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_m &= u_m(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

Aynı zamanda,

$$A_y := \{(x_1, \ldots, x_n) : r_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n) = y_m\}$$

Bu durumda ve $Y_1, \ldots, Y_m$'in birleşik p.d.f.si aşağıdaki ile verilir.

$$f_{Y_1,\ldots,Y_m}(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in A_y} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

Örnek 1(Binom Rasgele Değişkenlerin Toplaması). *Varsayalım ki $X \sim B(m, p)$ ve $Y \sim B(n, p)$ p.d.f.si aşağıdaki gibi olan bağımsız binom rasgele değişkenler olsun.*

$$\begin{aligned} f_X(k) &= \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \\ f_Y(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Eğer $Z = X + Y$ olarak tanımlarsak, p.d.f. $f_Z(z)$ nedir? X ardışık m bağımsız deneydeki ve Y ise n deneydeki başarı sayısı olduğu için (her ikisi de aynı başarı olasılığına sahiptir), o zaman Z'nin de m+n denemendeki p olasılıklı başarıların toplamı olması gerektiği bir ilk tahmin olarak söylenebilir. Yani $Z \sim B(m + n, p)$. Bu doğru olacakmış gibi görünüyor, ancak biçimsel olarak bunu kontrol etmemiz gerekiyor:

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= P(\{X = 0, Y = z\} \text{ or } \{X = 1, Y = z-1\} \ldots \text{or } \{X = z, Y = 0\}) \\ &= \sum_{k=0}^{z} P(X = k, Y = z-k) = \sum_{k=0}^{z} P(X = k) P(Y = z-k) \\ &= \sum_{k=0}^{z} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \binom{n}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{n-z+k} \\ &= \sum_{k=0}^{z} \binom{m}{k} \binom{n}{z-k} p^z (1-p)^{n-z} \end{aligned}$$

$p^z(1 - p)^{n-z}$ terimi k'ye bağlı değildir, bu nedenle onu toplamdan çekebiliriz. Diğer taraftan, aşağıdakini iddia ediyorum,

$$\sum_{k=0}^{z} \binom{m}{k} \binom{n}{z-k} = \binom{m+n}{z}$$

Gerçekten de, sayma kuralını kullanarak bunu gösterebiliriz: çarpım kuralı ve kombinasyon formülü ile, $\binom{m}{k}\binom{n}{z-k}$ terimi m sayılı bir gruptan çekilen k eleman içeren bir küme ile n sayılı başka bir gruptan çekilen z-k eleman içeren farklı küme sayısına karşılık gelir. Bütün k değerleri üzerinden toplayarak, birleştirilmiş iki kümeden (yani, m + n elemanlı bir küme) bir z kümesinin elemanlarını çekmenin toplam yollarının sayısını elde ederiz. Kombinasyon formülüne göre bu küme $\binom{m+n}{z}$'ye eşittir, bu da ispatlamaya çalıştığımız eşitliğin sağ tarafıdır

Bütün parçaları bir araya getirecek olursak,

$$P(Z = z) = \binom{m+n}{z} p^z (1-p)^{n-z}$$

Böylece gerçekten $Z \sim B(m + n, p)$.

Bir tedbir notu olarak, genel olarak aynı dağılım ailesinden –bu durumda binom– gelen iki bağımsız rasgele değişken X ile Y'nin toplamı olan Z aynı aileye ait olmayacaktır. Bu bağlamda, binom dağılım çok özel bir durumdur ve aynı özeliğe sahip sadece birkaç tane daha yaygın olarak kullanılan dağılım vardır. Örneğin, Eğer $X \sim B(m, p_X)$ iken $Y \sim B(m, p_Y)$ ve $p_X \neq p_Y$ ise, yukarıda elde edilenler hiçbir işe yaramayacaktır.

1.2 Sürekli Durum

Varsayalım ki $X_1, \ldots, X_n$ birleşik yoğunluğu yani $f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ p.d.f.si ile süreklidir ve Y (kavramı basit tutmak için sadece bir değişken kullanalım) aşağıdaki fonksiyon ile verilmektedir.

$$Y = u(X_1, \ldots, X_n)$$

Eğer

$$B_y := \{(x_1, \ldots, x_n) : u(x_1, \ldots, x_n) \leq y\}$$

ise, o zaman Y'nin p.d.f.si aşağıdaki ile verilir:

$$F_Y(y) = \int_{(x_1, \ldots, x_n) \in B_y} f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

2. Bire-Bir Dönüşüm için Değişken Değiştirme Formülü

Bu da yine sadece sürekli değişkenler ile çalışan özel bir durumdur: A $X_1, \ldots, X_n$'nin destekleyeni olsun, yani

$$P\Big((x_1, \ldots, x_n) \in A\Big) = 1$$

ve B'de $Y_1, \ldots, Y_n$ *indirgenmiş* destekleyeni olsun, yani

$$(Y_1, \ldots, Y_n) \in B \Leftrightarrow (X_1, \ldots, X_n) \in A$$

Varsayalım ki $Y_1, \ldots, Y_n$ türevlenebilir *bire-bir* dönüşümünden elde edilen $X_1, \ldots, X_n$'den elde edilsin,

$$\begin{aligned} Y_1 &= u_1(X_1, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= u_n(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

Yani $(x_1, \ldots, x_n) \in A$'nın her değeri $(y_1, \ldots, y_n) \in B$'nin birer elamanıyla eşleşmektedir. Bu durumda $[s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n)]$'nin tersini tanımlayabiliriz, böylece

$$\begin{aligned} X_1 &= s_1(Y_1, \ldots, Y_n) \\ &\vdots \\ X_n &= s_n(Y_1, \ldots, Y_n) \end{aligned}$$

Eğer $s_1(.), \ldots, s_n(.)$ B üzerinden türevlenebilirse aşağıdaki matrisini tanımlarız.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} s_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} s_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} s_n \end{pmatrix}$$

Kısmı türevin bu matrisi aynı zamanda *Jacobian*'ın ters dönüşümü olarak adlandırılır. Doğrusal Cebir'i almayanların, 2'ye 2 durumlarını çalışmaları yeterlidir. İkiye iki durumlarında Matris A'nın determinantının aşağıdaki gibi hesaplandığını bilmeniz gerekiyor:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Önerme 1. *X_1, …, X_n yukarıda vurgulandığı gibi Y_1, … , Y_n ile eşleşmesi bire-bir ve tersi olan $s_1(.)$, …, $s_n(.)$ türevlenebilir ise, o zaman Y_1, … , Y_n'nin birleşik p.d.f.si aşağıdaki ile verilir.*

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(s_1(y),\ldots,s_n(y)) \cdot |\det(J)| & \text{eğer} \quad y \in B = \text{destek}(Y_1,\ldots,Y_n) \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

2.1 Doğrusal Dönüştürme

X rasgele değişkenlerin bir vektörü olsun, yani det(**A**) ≠ 0 olan bir nxn matris **A** için,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \mathbf{AX}$$

Bu durumda doğrusal eşleştirme (mapping) **Y** = **AX** bire-birdir (matrisin tersi olduğu için) ve değişken değiştirme formülünü kullanarak Y'nin birleşik dağılımını bulabiliriz.

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)|\det(\mathbf{A}^{-1})| = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

Örnek 2. Bunun ekonomideki önemini görmek için, varsayalım ki Boston'daki portakal suyu piyasası için basit (kısmı denge) bir modelimiz var. Firmalar fiyat *p*'nin bir doğrusal fonksiyonu(α_s ve β_s katsayılı) olan miktar q_s'i arz etmek niyetindedirler.

$$q_s = \alpha_s + \beta_s p + u_s$$

Burada u_s rasgele bir değişkendir (diyelim ki Florida'daki güneşli saatler gibi). Tüketiciler başka bir tesadüfi şok u_d veriyken (diyelim ki gelir) miktar q_d'yi talep ederler.

$$q_d = \alpha_d - \beta_d p + u_d$$

Denge durumunda, arz talebe eşittir, yani fiyatlar öyledir ki $q_s = q_d = q$'dir ve fiyatlar ile miktarlar beraber aşağıdaki ilişki tarafından belirlenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_s \\ 1 & \beta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_s \\ u_d \end{bmatrix}$$

Fiyat ve miktarların birleşik dağılımını elde edeceğimiz şokların (u_d, u_s) birleşik p.d.f.si $f_U(u_s, u_d)$'yi biliyor olabiliriz ya da varsayabiliriz. Bu birleşik p.d.f. kesin şekilde Jacobian'a (sol taraftaki matris) bağlı olacaktır. Bu durumda *det(J)* = $\beta_d + \beta_s$'dir, bu nedenle eğer arz veya talep önemli (nontrivial) bir eğime sahip ise, şoklardan fiyata ve miktara dönüşüm bire-birdir ve sonuçta ortaya çıkan birleşik p.d.f. aşağıdaki gibidir:

$$f_{PQ}(p,q) = f_U(u_1(p,q), u_2(p,q))|\beta_s + \beta_d|$$

Bu durum, bu derste işleyeceklerimizden biraz uzak gibidir ancak Jacobian terimi $|\beta_d + \beta_s|$ piyasa dengesi aracılığıyla fiyat ve miktarın karşılıklı bağımlılığını yakalar. Bunun, 14.32 dersinde piyasa sonuçlarından arz ve talebin ayrı ayrı tahmin edilmesini zorlaştıran "eşanlılık problemi" olarak adlandırılan durumun kaynağı olduğu ortaya çıkmıştır. Bu Ekonometrinin temel problemlerinden biridir.

2.2. X +Y'nin Dağılımı (Bükülme)

Varsayalım ki X ve Y bağımsız sürekli rasgele değişkenlerdir ve p.d.f.leri, sırasıyla, fX(x) ve fY(y)'dir ve böylece rasgele değişkenlerin birleşik p.d.f.leri $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$'dir. Z = X + Y'nin p.d.f.si nedir?

Örnek 3. *Bunun gibi bir örneği sınıfta yaptığımızı hatırlayınız: çim biçme makinesindeki iki bujini ömrüne bakmıştık, ve $P(X + Y \leq z)$ olasılığı $\{(x, y) : y \leq z - x\}$ ile tanımlanmış üçgen üzerinden $f_{XY}(x, y)$ birleşik yoğunluğun integrali olduğu ortaya çıkmıştı. Bu durumda Z'nin c.d.f.si aşağıdaki gibidir:*

$$F_Z(z) = P(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x)f_Y(y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z-x)dx$$

Buradan, Z'nin yoğunluğunu elde edebiliriz,

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

Rasgele değişken Z = X + Y, X ve Y'nin büklümü olarak ta adlandırılır. Son formülün sadece bağımsız rasgele değişkenlerin toplanması halinde geçerli olduğunu not ediniz.

Örnek 4. *Önceki örnekteki tartışma "2-adım" yönteminin çizgisiyle aynıydı ve değişkenlerin dönüşümü formülünü kestirme bir yol olarak kullanmanın mümkün olup olmayacağı merak edilebilir.*

(X, Y)'den Z'ye eşleme açıkça bire-bir değildir, bu nedenle değişkenlerin dönüşüm formülünü doğrudan kullanamayız. Ancak, aşağıdaki "hileyi" yapabiliriz: aşağıdakiler tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
Z = u_1(X, Y) &= X + Y \\
W = u_2(X, Y) &= Y
\end{aligned}
$$

O zaman, ters dönüşüm şöyle tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
X = s_1(Z, W) &= Z - W \\
Y = s_2(Z, W) &= W
\end{aligned}
$$

Bu durumda

$$
\det \mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1
$$

Bundan ötürü,

$$
f_{ZW}(z, w) = f_{XY}(s_1(z, w), s_2(z, w)) = f_X(s_1(z, w)) f_Y(s_2(z, w)) = f_X(z - w) f_Y(w)
$$

Birleşik p.d.f.'yi w üzerinden integralini alarak Z'nin marjinal p.d.f.sini elde edebiliriz artık.

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - w) f_Y(w) dw
$$

Bu bir önceki türetmeden elde edilen formülün aynısıdır.

Örnek 5. *Şimdiye kadar üstel dağılımın birkaç örneğini gördük (çim biçme makinesi örneğindeki gibi). X ve Y bağımsız üstel rasgele değişkenlerdir ve marjinal p.d.f.leri şöyle olsun:*

$$
f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{eğer if } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}
$$

Son formül ile , Z = X + Y'nin p.d.f.si aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - w) f_Y(w) dw \\
&= \int_0^z e^{-(z-w)} e^{-w} dw \\
&= \int_0^z e^{-z} dw = z e^{-z}
\end{aligned}
$$

Burada, ikinci adımdaki integralin limiti X ve Y'nin desteğinin pozitif reel sayılar ile sınırlı olması gerçeğinden gelmektedir. Yani $z < 0$ için $f_X(z)$ sıfırdır, halbuki $z > w$ için $f_Y(z - w)$ sıfır olur.