14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Ders Notları 3

Konrad Menzel

10 Şubat 2009

1 Sayma Kuralları ve Olasılık

Hatırlanacağı gibi, basit olasılık ile sonuçların eşit olarak mümkün olduğu ve sonlu bir örneklem uzayı için, A olayının olasılığı

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ile ifade edilir.

Şimdi, bu olasılıkları hesaplamak için sayma kurallarını nasıl kullanacağımızı göreceğiz.

Örnek 1. *Her bir kartın çekilme olasılığının eşit olduğunu varsayarak, yerine koyma yöntemiyle 52'lik bir desteden iki kart çekin. İki farklı kart çekmenin olasılığı nedir?*

$$S = \{(A\clubsuit, A\clubsuit), (A\clubsuit, A\spadesuit), \ldots\} \Longrightarrow n(S) = 52^2$$

"iki farklı kart" olayı

$$A = \{(A\clubsuit, A\spadesuit), (A\clubsuit, A\heartsuit), \ldots\} \Longrightarrow n(A) = \frac{52!}{(52-2)!} = 52 \cdot 51$$

içerir. Böylece

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{52!}{(52-2)!(52)^2} = \frac{51}{52} \approx 0.98$$

Alternatif olarak, olasılığın birinci önermesini kullanabilirdik:

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 -$ P("aynı iki kart") = 1 – P("ikinci kart birincinin aynısı") = $1 - \frac{1}{52} = \frac{51}{52}$

Bazı başka örneklerde, bir olayın olasılığını, tümleyeni aracılığıyla hesaplamak işlemleri çok basitleştirebilir.

Örnek 2. *Varsayalım ki Ocenia ülkesi Eurasia'nın başkentine 8 tanesi nükleer başlık taşıyan 16 füzeyle saldırdı[1]. Yine varsayalım ki, Eurasia ordusu 16 füzeyi de izleyebilir ve hangi füzenin konvansiyonel başlık taşıdığını ayırt edemeyen ancak her birisi gelen füzelerin önünü kesin olarak kesebilecek 12 rokete sahip olsun. Euarasia'nın felaketi önleyememesi ve en az bir nükleer başlıklı füzenin hedefine ulaşma olasılığı nedir? Sezgisel tahmininiz ne olurdu?*

Her durumda, tam olarak 4 füze hedefine ulaşacağı için, S örneklem uzayı 16'da 4 füzenin bütün kombinasyonlarını içerir. Dolaysıyla, S'nin elemanlarının sayısı binom katsayısı ile verilir.

$$n(S) = \binom{16}{4} = \frac{16!}{12!4!}$$

Olasılığı değerlendirebilmek için, bir yaklaşım tümleyen kuralını kullanmaktır. Olay A = "en az bir nükleer başlık hedefi vurur" un tümleyeni A^C = "hedefi vuran bütün füzeler konvansiyoneldir" dir ve A^C'nin sonuçları 8'den 4 füzenin (konvansiyonel olanlar) bütün kombinasyonları şeklinde hesaplanır. Böylece

$$n(A^C) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!}$$

Bu nedenle,

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{12!4!8!}{16!4!4!} = 1 - \frac{12!}{16!}\frac{8!}{4!} = 1 - \frac{1}{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1} = \frac{25}{26}$$

Öyleyse bu olasılık bire oldukça yakın– bunu bekleyip beklemediğinizden emin değilim, fakat politik olarak doğru olmasa da, bu örnek çok sayıda olanağın olduğu kombinasyon problemlerinde sezgilerin çok kolay yanılabileceğini göstermektedir.

Örnek 3. *Meşhur doğumu günü "paradoksu" (bir zamanlar) popüler bir parti oyunu ile ilgilidir: n kişilik bir arkadaş grubunuz olsun, onlardan en az bir çiftin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı nedir? (bütün doğum günlerinin eşit olasılıklı olduğunu varsayalım. Bu gerçekte, sadece kabaca ampirik olarak doğrudur.) Yine, her bir n arkadaşınızın*

[1] Buradaki isimler Orwell'in romanı "1984" ten alınmıştır, dolayısıyla bunun bir gerçek dünya örneği olması gerekmiyor.

farklı doğum gününe sahip olduğu A^C tümleyen olayına bakalım: Bu, yerine koymadan 365'ten n tane çekilişe tekabül ettiği için, ilgili formülü kullanabiliriz:

$$n(A^C) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

Böylece en az iki arkadaşınızın aynı doğum gününe sahip olma olasılığını, P(A), hesaplayabiliriz:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{n(A^C)}{n(S)} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

Bu formül bilhassa kolay okunmaz, bu nedenle şimdi n'nin birkaç değeri için olasılıkları ondalık olarak aşağıya yazalım:

n	$P(A)$
5	0.027
10	0.117
15	0.253
20	0.411
25	0.569
30	0.706
50	0.97
366	1

Birçok kişi bu olasılıkları çok yüksek bulabilir, fakat bu genellikle kişinin n arkadaşınızdan herhangi birinin sizinle aynı doğum gününe sahip olma olasılığını hesaplayarak düşünmeye başlama eğilimi yüzündendir. Siz kendinizi, listemizin farklı olduğu, olasılığın

$$P(\tilde{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

olduğuna ikna edersiniz. Bu farklılığın nedeni, önceki durumda, A'nın aynı zamanda n arkadaşınız arasındaki bütün eşleşmeleri kapsamasıdır ki bu da sayıyı hızlı bir şekilde yukarı doğru çekmiştir.

n	$P(A)$
5	0.014
10	0.027
15	0.040
20	0.053
25	0.066
30	0.079
50	0.128
366	0.634

2. Bağımsız Olaylar

Sezgisel olarak, iki farklı olay olan A ve B için A'nın gerçekleşmesinin B'nin gerçekleşme olasılığını "etkilemediği" bir kavram tanımlamak istiyoruz. Örneğin eğer bir madeni parayı iki kere fırlatırsak, ikinci atışın sonucu herhangi bir şekilde birinci atışın sonucundan etkilenmemelidir. Notasyonu basit tutmak için bundan sonra

$$P(A \cap B) = P(AB)$$

olarak ifade edilecektir.

Tanım 1. *A ve B olayları, eğer aşağıdaki koşulu sağlarlarsa bağımsızlardır*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Buradaki bağımsızlığın, olayların fiziksel doğasının değil, sadece olasılık dağılımın bir özeliği olduğunu görebilirsiniz. Bu yüzden bazı olaylarda bağımsızlık hakkında iyi sezgiye sahip iken (bir dizi yazı-tura atma gibi), çoğu durumda bu formal koşulu kontrol etmekten başka seçeneğimiz yoktur.

Örnek 4. *Diyelim ki adil bir zarı iki kere fırlattık, aşağıdaki olayların ve kesişimlerinin olasılığı nedir?*

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Sonuçları sayarak P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$*'dir ve aynı şekilde, P(B) =* $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ *'tür. Olayların kesişim olasılığı*

$$P(AB) = P(\{2, 4\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(A)P(B)$$

Böylece olaylar aynı atıştan elde edilmesine rağmen bağımsızdır.

Bağımsızlığın belirtilen olasılık dağılımına ne denli önemli bir şekilde bağlı olduğunu görmek için, şimdi varsayalım ki, zar manipüle edildi ve böylece P(6)=3/8, diğer bütün sayılar için n = 1, … , 5, P(n) = 1/8 olsun. O zaman, ayrık olayların olasılıklarının toplamı üzerine olan (P3) aksiyomuna göre,

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}, \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ve

$$P(AB) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < P(A)P(B) = \frac{5}{16}$$

Bağımsızlığın bir yorumu da şöyledir: Varsayalım ki B'nin meydana geldiğini biliyoruz, bu bilgi bizim A'nin gerçekleşme ihtimali konusundaki inancımızı değiştirir mi (ya da tersi)? Bunu sonraki bölümde formüle edeceğiz ve göreceğiz ki eğer A ve B bağımsızsa, B'nin oluşması bilgisinden A olayı hakkında öğreneceğimiz hiçbir şey yoktur.

Önerme 1. *Eğer A ve B bağımsız ise, o zaman A ve B^C' de bağımsızdır.*

İSPAT: A'yı AB ve AB^C gibi iki ayrık olaya bölebileceğimiz için, aşağıdaki şekilde bağımsızlığı ispatlayabiliriz:

$$P(AB^C) \overset{(P3)}{=} P(A) - P(AB) \overset{\text{Bağımsız}}{=} P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^C)$$

Şimdi bağımsızlığın tanımını iki olaydan daha öteye taşıyabiliriz.

Tanım 2. Bir grup A_1, A_2,…. olaylarının bağımsız olması için, *bu olayların herhangi bir alt grubu A_{i1}, A_{i2}, … için (bütün indeksler farklıyken),* aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots$$

Örneğin, A, B, C olayları için,

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad P(AC) = P(A)P(C), \qquad P(BC) = P(B)P(C)$$

ve

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

Örnek 5.

Örneklem uzayı $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ve bütün sonuçlar için $P(s_i) = 1/4$ olsun, o zaman her bir olay

$$A = \{s_1, s_2\}, \quad B = \{s_1, s_3\}, \quad C = \{s_1, s_4\}$$

1/2 olasılıkla gerçekleşir.

($A \cap B$) olayının olasılığı

$$P(AB) = P(\{s_1\}) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

ve bu durum herhangi iki olay için de doğrudur, böylece olaylar ikili olarak bağımsızdır. Ancak, hepsi beraber ele alındığında toplam yığın bağımsız değildir. Çünkü

$$P(ABC) = P(\{s_1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Sezgisel olarak, A ve B'nin gerçekleştiğini bilirsek, C'nin gerçekleştiğini kesin biliriz.

3. Koşullu Olasılık

A'nın gerçekleşmesinin *B*'nin gerçekleşmesini (ya da gerçekleşmemesini)etkilediğini ve tersini varsayalım. *A* hakkında bilgi verilmişken, *B*'nin gerçekleşme olasılığını nasıl tanımlarız? Eğer iki olay bağımsız ise, *A*'nın *B* hakkında hiçbir bilgi vermeyeceğini zaten sezgisel olarak tartışmıştık. Ancak eğer bilgi verirse ne olur? Sonuç olarak olasılıkları nasıl değiştiririz?

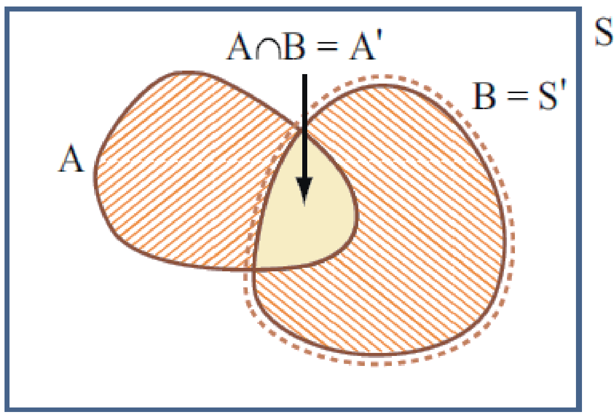
Örnek 6. *Eğer adil bir zarı atarsak ve gerçekte sonucun çift bir sayı olduğunu söylersek, yani $B = \{2, 4, 6\}$ olmuşsa, zarın 6 gelmiş olma olasılığı nedir? B'de sadece 3 tane eşit olasılıklı sonuç olduğu için, ki 6 onlardan biridir, biz sezgisel olarak cevabın 1/3 olmasını bekleriz. Burada örneklem uzayını $\hat{S} = B = \{2, 4, 6\}$'ye indirgedik ve yeniden tanımlanmış probleme göre basit olasılığı hesapladık.*

Tanım 3. *Varsayalım ki, $P(B) > 0$ iken, A ve B, S'de tanımlanmış olaylar olsun. B'nin gerçekleşmesi durumunda A'nın koşullu olasılığı*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ile verilir.

Sezgisel olarak, pay, *B*’nin gerçekleştiğinin bilinmesi durumunda *A*’daki hangi sonuçların olası olduğunu ifade eder. Payda tüm örneklem uzayı için aynı şeyi yapar.



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 2. B’ye koşullanmış olarak A olayı

Açıklama 1. *Koşullu olasılık ve bağımsızlık: Eğer A ve B bağımsız ise,*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Öyleyse B’nin gerçekleşmesi bize A hakkında hiçbir şey söylemediğinden koşullu olasılık, koşulu olmayan olasılığın aynısıdır.

Örnek 7. *Bu örnek Greg Mankiw’in web günlüğünden (blog)*[2] *uyarlanmıştır. Intrade gibi platformlarda, eğer bir olay gerçekleşirse (örneğin, Yankeelerin dünya şampiyonasını kazanması) 1 dolar ödeyen değerli kağıtları alıp satabilirsiniz . Eğer piyasa gerektiği gibi çalışırsa, bu tip değerli kağıtların belirli bir t zamanındaki fiyatı, alıp satanların bu t zamanındaki bilgisine bağlı olan olasılık şeklinde yorumlanabilir. Intrade’deki politik piyasada, aşağıdaki olaylar için değerli kâğıt alıp satabilirsin:*

- A_i *aday adayı i başkanlık seçimini kazanır (adaylık koşuluna bakılmaksızın)*
- B_i *aday adayı i partisinin adaylığını kazanır*

[2] http://gregmankiw.blogspot.com/2006/11/bayes-likes-obama

- *C_k k partisinin adayı seçimi kazanır*

Şimdi, ilgili olayların değerli kağıtlarının fiyatları kullanılarak belirlenen olasılıkları kullanarak piyasanın, partinin aday göstermesine bağlı olarak aday adayı olması halinde, $P(A_i|B_i)$, her partinin hangi aday adayının başkanlık seçimini kazanma olasılığının en yüksek olduğunu düşündüğü sorusunu cevaplandırabiliriz. Yani hangi adayın önerilmesi partiye başkanlık seçimini kazanmada en yüksek şansı sağlardı.

Parti tarafından aday gösterilmeyen adayın seçimi kazanma şansının olmadığını rahatlıkla (nispeten) varsayabiliriz, bundan ötürü

$$A_i \subset B_i \Longrightarrow A_i \cap B_i = A_i$$

Böylece,

$$P(A_i|B_i) = \frac{P(A_i \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{P(A_i)}{P(B_i)}$$

Böylece, ilgili değerli kağıdın fiyatını sadece formülde yerine koymamız yeterlidir. 6 Şubat'taki Intrade politik piyasasındaki değerli kağıt fiyatlarına dayanarak, aşağıdaki rakamları elde ederiz (son sütunda, Mankiw'un Kasım 2006'daki orijinal web günlüğünde yer alan değerleri kullandım).

ADAY	$P(A_i)$	$P(B_i)$	$P(A_i\|B_i)$	$\tilde{P}_{\text{Kasım 06}}(A_i\|B_i)$
Clinton	28.7%	45.2%	63.5%	51%
Huckabee	0.5%	2.0%	25.0%	NA
McCain	34.4%	93.0%	37.0%	63%
Obama	35.0%	53.0%	66.0%	88%
Paul	0.4%	1.2%	33%	NA
Romney	1.2%	2.6%	46.2%	50%

P(A)'yı $P(A|B_i)$ koşullu olasılığından ayırt etmek için, P(A), A'nın *marjinal* olasılığı olarak da adlandırılır. Marjinal ile koşullu olasılık arasındaki ilişki Toplam Olasılık Kanunu ile verilir.

Teorem 1. (***Toplam Olasılık Kanunu***) *Varsayalım ki $B_1, \ldots, B_n$ örneklem uzayı S'nin bir bölüntüsü ve her $i = 1, \ldots, n$ için $P(B_i) > 0$ olsun. O zaman herhangi bir B olayı için,*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

İSPAT: Koşullu olasılık tanımından herhangi bir B_i olayı için $P(A|B_i)P(B_i) = P(A \cap B_i)$. B_1, …, B_n örneklem uzayı S'nin bölüntüleri olduğundan, $(A \cap B_1)$ … $(A \cap B_n)$, ayrık ve A için karşılıklıdır, yani A için bölüntü oluştururlar. Bu nedenle, ayrık kümelerin birleşiminin olasılığı üzerine olan aksiyom (P3)'e göre

$$\sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = P(A).$$

Örnek 8.

Tıbbi veride, sıklıkla daha yaşlı ve tecrübeli kalp cerrahları tarafından tedavi edilen hastaların aslında daha genç olanlar tarafından tedavi edilenlere göre daha yüksek ameliyat sonrası ölüm oranına sahip oldukları görülmektedir. Tecrübeli cerrahlar için % 6'lık, daha genç olanlar için sadece %5.5'lik ölüm oranlarını gözlemlediğimizi varsayalım. Bu durum, cerrahların yeteneklerinin yaş ilerledikçe azaldığı anlamına gelir mi? Muhtemelen değil – Burada bir cerrahın uygulamak zorunda olabileceği dört çeşit prosedür olduğunu varsayalım – tekli, ikili, üçlü ve dörtlü bypass (terminoloji bypass edilmesi gereken koroner arter sayısını göstermektedir). Prosedürün karmaşıklığı ve hastaların riski baypas sayısıyla artar ve genellikle "daha hasta" olan hastalar daha komplike prosedürlere ihtiyaç duyabilirler. Varsayalım ki, her bir prosedür için, tecrübeli cerrahların hastalarının bariz bir şekilde çok daha düşük ölüm oranına sahip oldukları, fakat tecrübesiz cerrahların hasta ölümlerinin oranının genel olarak daha düşük olduğu bize söylendi. Toplam olasılık kanunun ışığında, bu iki durum nasıl bir arada gerçekleşebilir? Şimdi bir örneğe bakalım (Bu rakamlar elbette uydurmadır)

Prosedür	*Tecrübesiz*		*Tecrübeli*	
	Ölüm Oranı	*Vaka Yüzdesi*	*Ölüm Oranı*	*Vaka Yüzdesi*
Tekli Baypas	*% 4.0*	*% 50.0*	*% 2.0*	*% 25.0*
İkili Baypas	*% 6.0*	*% 40.0*	*% 4.0*	*% 25.0*
Üçlü Baypas	*% 10.0*	*% 9.0*	*% 6.0*	*% 25.0*
Dörtlü Baypas	*% 20.0*	*% 1.0*	*% 12.0*	*% 25.0*
Toplam	*% 5.5*	*% 100.0*	*% 6.0*	*% 100.0*

Toplam Olasılık Kanunun ifadesi çerçevesinde, tecrübeli cerrahlar için genel ölüm oranları P(A), B_i prosedürüne koşullu ölüm oranlarından, $P(A|B_i)$ ve baz oranı / vakaların birbirlerine göre oranları $P(B_i)$ ile hesaplanabilir.

Tecrübeli cerrahlar her prosedüre karşılık gelen orantısız bir şekilde yüksek oranlarda riskli vakalarda görevlendirildikleri için (varsayımsal olarak bu gibi durumlarda daha fazla tecrübeye ihtiyaç olduğu için), her bir tedavi kategorisini daha iyi uyguladıkları halde, ortalama (marjinal demek daha doğru) ölüm oranlarının tecrübesiz cerrahlarınkinden daha yüksek olduğunu görebiliyoruz. Bu durum sıklıkla kompozisyon etkisi olarak anılır.

O halde her bir olasılık türünün pratik önemi nedir? Eğer baypas için cerrahlar arasından birini seçmek durumunda olsaydınız, prosedürün tipi yalnızca sağlık durumunuza bağlı olmalıydı, cerrahın tecrübeli olup olmamasına değil, dolaysıyla bu durumda sadece koşullu olasılığı önemsemeliydiniz.

Marjinal ölüm oranları için iyi bir kullanım alanı bulmak daha zor.

Bir çok istatistiki analizde, gerçekte koşullu ölüm oranlarıyla ilgilenirsiniz (örneğin, eğer siz tecrübenin ölümler üzerindeki etkisiyle ilgileniyorsanız) ve "prosedür tipi" değişkeni istatistikçilerin adlandırdığı üzere "karışıklığa neden olan faktör" olarak ele alınır. İstatistik ve Ekonometrideki klasik sorun, sıklıkla birçok ilgili "karışıklığa neden olan faktör" 'ün gözlemlenmemesidir ve siz bu problemin üstesinde gelme yollarını öğreneceksiniz.

Açıklama 2. *Diğer bir yakın ilişkili kavram da ekonometride çok önemli olan koşulu bağımsızlıktır. Aşağıdaki koşulun sağlanması durumunda, A ve B'nin C'ye koşullanmış iki bağımsız olay olduğu söylenebilir.*

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Aşağıdakilere dikkat çekmekte fayda vardır

- *Koşulsuz bağımsızlık koşullu bağımsızlığı sağlamaz*
- *Koşullu bağımsızlık koşulsuz bağımsızlığı sağlamaz*

Yani A ve B'nin bağımsız olup olmaması ciddi bir şekilde neye koşulladığımıza bağlıdır. Sonraki problem setinde bir karşı- örnek içeren bir uygulama olacaktır.

4. Koşullu Bağımsızlık (derste işlenmedi)

Bağımsızlığın tanımını koşullu olasılıklara uygulayabiliriz:

Tanım 4. *A ve B olaylarının C olayına bağlı olarak bağımsız olmaları için koşullu olasılıkları aşağıdaki şartı sağlaması gerekir:*

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Bu tanım daha önce ele aldığımız koşulsuz bağımsızlık ile tam uyumludur. Biz sadece kendimizi yeni örnekle S' = C ile sınırlıyoruz. Koşullu bağımsızlık daha sonra ekonometride çok önemli bir rol oynayacak. Bu nedenle özel olarak üzerinde durulmayı hak ediyor. Teknik olarak, koşullu bağımsızlığın koşulsuz bağımsızlığı sağlamadığını (ya da tersini) not etmek önemlidir. Başka bir ifade ile, iki olayın bağımsız olup olmaması ciddi bir şekilde başka neye koşulladığımıza bağlıdır. Bunu önceki derste belirtmiştim, şimdi ise başka bir örnek vererek açıklayacağım.

Örnek 9. *Her bir sonucun 1/6 olasılıkla gerçekleştiği, zar atma örneğine tekrar bakalım, yani S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} .*

(1) İki bağımsız olayı bağımlı yapma: A = {1, 2, 3, 4} ve B = {2, 4, 6} olaylarını düşünün. Daha önceki örnekte bu iki olayın bağımsız olduğunu zaten görmüştük.

$$P(A)P(B) = P(\{1,2,3,4\})P(\{2,4,6\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3} = P(\{2,4\}) = P(AB)$$

Şimdi olay C = {3, 6} olsun. O zaman

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(\{3\})}{P(\{3,6\})} = \frac{1}{2} = \frac{P(\{6\})}{P(C)} = \frac{P(BC)}{P(C)} = P(B|C)$$

Ancak,

$$P(AB|C) = \frac{P(\emptyset)}{P(C)} = 0 \neq P(A|C)P(B|C)$$

Yani, onların kesişimi C ile ayrışık olduğu için, A ve B, C'ye bağlı olarak bağımsız değillerdir.

(2) İki bağımlı olayı bağımsız yapma: D = {2, 3, 4} ve E = {2, 4, 6} olsun. D ile E'nin bağımlı olduğunu kontrol edebiliriz: P(D) = P(E) = 1/2 olduğunu görebiliriz. Ancak,

$$P(DE) = P(\{2,4\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(D)P(E)$$

Fakat eğer F = {3, 4, 5, 6} üzerine koşullarsak

$$P(DE|F) = \frac{P(\{4\})}{P(\{3,4,5,6\})} = \frac{1}{4}$$

Halbuki

$$P(D|F)P(E|F) = \frac{P(\{3,4\})}{P(\{3,4,5,6\})} \cdot \frac{P(\{4,6\})}{P(\{3,4,5,6\})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Böylece F üzerine koşullanınca, D ve E bağımsız oldu.