

MIT OpenCourseWare  
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş  
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

### 14.30 Sınav 3

Bahar 2008

**Açıklamalar:** Bu, kitapların ve notların kapalı olduğu bir sınav olacaktır. Hesap makinası kullanabilirsiniz. Lütfen önce sınavı baştan sona okuyarak anlaşılmayan yerleri sorunuz ve sorulara harcayacağınız zamanı ayarlayınız. Hesaplama hatalarının yapılması durumunda kısmi puan almak için lütfen yaptığınız bütün işlemleri gösteriniz. Sınavı bitirmek için aşağı yukarı 90 dakikanız var. İyi şanslar.

#### 1. (25 Puan) Beklenen Değer ve Varyanslar

Aşağıdakiler  $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY}$ 'li normal dağılımlı rasgele değişkenler olsun.

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \text{ ve } Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

İki değişkenin sabit bir  $w$  için ağırlıklandırılmış toplamları,  $Z = wX + (1 - w)Y$ 'ye bakıyoruz.

- $w$ 'nin bir fonksiyonu olarak,  $Z$ 'nin beklenen değeri nedir?
- $w$ 'nin bir fonksiyonu olarak,  $Z$ 'nin varyansı nedir?
- $\mathbb{E}[Z^2]$ 'yi hesaplayınız.
- Varsayalım ki tasarruflarınızı yatırıma dönüştürmek istiyorsunuz ve  $X$  ve  $Y$  sırasıyla hisse senedi 1 ve hisse senedi 2'nin getirisi olsun. Eğer hisse senedi 1'e yatırdığınız tasarrufun oranı  $w$  ise, toplam getiriniz  $Z = wX + (1 - w)Y$ 'dir. Her iki değerli kağıdın beklenen getirisinin aynı olduğunu varsayalım, yani  $\mu_X = \mu_Y$ , ve  $w$ 'yu getirilerin dalgalanmasını mümkün olduğunca düşük seviyede tutacak şekilde belirlemek istiyorsunuz. (b)'ye verdiğiniz cevaba göre,  $w$ 'nin hangi değeri  $Z$ 'nin varyansını minimize eder?  $X$  ve  $Y$ 'nin bağımsız olduğunu varsayalım. En optimal  $w$  değeri ne zaman sıfır ile 1 arasında değildir? Niye her şeyinizi sadece varyansı daha düşük olan hisse senedine yatırmamalısınız?
- (seçmelidir, ekstra puan verilir): Varsayalım ki  $p_X$  olasılıkla  $X = -\infty$  ve  $1 - p_X$  olasılıkla  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 'dir. Aynı şekilde,  $p_Y$  olasılıkla  $Y = -\infty$  ve  $1 - p_Y$  olasılıkla  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 'dir. Aynı şekilde, daha önce olduğu gibi  $X$  ve  $Y$  bağımsızdır. Yine hisse senedi kombinasyonuna sahipsiniz, yani  $wX + (1 - w)Y$ , ve olasılık  $P(wX + (1 - w)Y = -\infty)$ 'yi mümkün olduğunca düşük tutmayı arzulamanız akılcı gibi görünüyor.  $w$  veri iken böyle bir şokun olasılığı nedir? Hala çeşitliliği tercih ediyor musunuz? Bu (d)'de bulduğunuz ile çelişir mi? Kısa bir cevap yeterlidir, cebir kullanmak gerekmez.

## 2. (25 Puan) Tahmin

Siz ve arkadaşınız Athena koridorunda yazıcıdan çıktı almak için bekliyorsunuz. Laboratuvarında birçok öğrenci daha vardır ve 10-dakika aralıklı çıktı sayısı  $\lambda$  parametresi bilinmeyen Poisson dağılımlıdır.

Varsayalım ki arkadaşınızla her karşılaşmanızda, çıktılarınızı almış ve 10 dakika kadar sohbet etmek için zamanın olmuş olsun. Bu 10 dakikalık aralıklarda yazıcıdan çıkan  $X_i$  sayıdaki çıktının kaydını tuttuğunuzu düşünelim.  $X_1, \dots, X_{12}$  gibi bir örneklemin ortalaması  $\bar{X}_{12}$

= 5.17 ve karelerin ortalaması ise  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^2 = 31.43$ 'tür.

- Örneklemin ortalamasını kullanarak, Poisson parametresi  $\lambda$  için momentler yönteminin tahmin edicisini hesaplayınız.
- Bir Poisson rasgele değişken  $X$  için,  $\text{Var}(X) = \lambda$  olduğunu hatırlayınız. Yukarıda verilen bilgiye dayanarak, alternatif bir momentler yöntemi tahmin edicisini oluşturabilir misiniz? O tahmin edici (a)'da bulduğunuzdan farklı mıdır? Eğer cevabınız evet ise, sizce bu bir sorun mudur?

Şimdi, çıktıları saymak yerine, arkadaşınızın çıktıları gelinceye kadar sadece geçen sürenin kaydını tuttuğunuzu düşünelim. İstatistik kitabınız bir Poisson olayın  $r$ .nci oluşumunun bekleme süresi  $T_i$ 'nin aşağıdaki gibi bir p.d.f.si olduğunu söyler:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t} & \text{eğer } t > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Arkadaşınızın çıktı alma sırasının size sıranızın 5 kişi gerisinde olduğunu biliyorsunuz (yani  $r = 5$ ) ve sadece beraber beklerken geçen  $T_1$  bekleme süresinin kaydını tutuyorsunuz.

- İ.i.d. olan  $T_1, \dots, T_n$  örneklemin olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonu nedir?
- $\lambda$  için maksimum olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.
- $T_1, \dots, T_n$  örneklemini için detaylı notlarınızı kaybettiniz fakat ortalama bekleme süresinin  $\bar{T}_n = 3.84$  ve bekleme süresinin örneklem varyansının  $\hat{S}_n = 4.12$  olduğunu hala hatırlıyorsunuz.  $\lambda$  için hala tutarlı bir tahmin edici hesaplayabilecek misiniz?

## 3. (15 Puan) Güven Aralığı

Varsayalım ki  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  dağılımlı bir 25 gözlemlili i.i.d. olan  $X_1, \dots, X_{25}$  örnekleminiz var. Örneklemin ortalaması  $\bar{X}_{25} = 1.2$ 'dir.

- $\sigma^2 = 4$  varsayımı altında  $\mu$  için %95'lik bir güven aralığı oluşturunuz.

- (b) Şimdi  $\sigma^2$ 'ı bilmediğimizi varsayalım, fakat ben size  $\bar{X}_{25}^2 = \frac{1}{25} \sum_{t=1}^{25} X_t^2 = 6.38$  olduğunu söyledim.  $\mu$  için %95'lik bir güven aralığı oluşturunuz.
- (c) Varsayalım ki %5 güvenirlilik düzeyinde  $H_A : \mu > 0$ 'a karşı boş hipotez  $H_0: \mu = 0$ 'yı test etmek istiyorsunuz. Daha önce olduğu gibi  $\bar{X}_{25}$  ve  $\bar{X}_{25}^2$  verili iken (gerçek  $\sigma^2$  varyansını bilmediğinizi varsayanız), boş hipotezi ret eder misiniz?

#### 4. (20 Puan) Hipotez Testi

Varsayalım ki  $X \sim U[-\theta, \theta]$ . Bu dağılımdan sadece bir tek gözleminiz var ve şunu test etmek istiyorsunuz:

$$H_0: \theta = 1$$

$$H_A: \theta = 0.1$$

- (a)  $X$ 'in p.d.f.sini belirtiniz (ipucu: p.d.f.nin nerede sıfır nerede sıfır olmadığına dikkat ediniz).
- (b) En güçlü testi elde ediniz – testin gerçekten en güçlü test olduğunu göstermek için sınıfta elde edilen sonuçlardan hangisini kullanırsınız?
- (c) “Eğer  $|X| < 0.1$  ise  $H_0$  ret et” testini düşününüz. Bu testin  $\alpha$  büyüklüğü nedir?  $1 - \beta$  gücü nedir? Hesaplamaları yaparken büyüklük ve güç tanımlamalarını yaptığınızdan emin olunuz.
- (d) %5 büyüklüğü için en güçlü testi oluşturabilir misiniz?

#### 5. (15 Puan) Hipotez Testleri

Telepati üzerine içinde deneğinizin bir test almak zorunda olduğu bir rasgele deney yapıyorsunuz. Bir medyum, yani doğa üstü yetenekleri olan kişi, diğer insanların düşüncelerini ve duygularını sadece ekstra-duyarlı algılama aracılığıyla etkileyebildiği iddiasında bulunmaktadır.

$N$  sayıdaki deneğinizi  $m$  ve  $n$  gibi iki gruba ayırıyorsunuz. İlk  $m$  grubu (denek grubu) için medyum elinde testlerin çözümler ile yan odada oturup testi yapanlara yardımcı olmak için düşünmektedir. İkinci  $n$  grubu (kontrol grubu) ise, testi normal koşullarda almaktadır. Kendine güven sorunu ortaya çıkmasın diye, gruplara medyumdan yardım alınıp alınmadığı yönünde hiçbir şey söylenmemiştir.

Medyumdan yardım alanlardan  $X_1, \dots, X_m$  skor örneklemini ve kontrol grubundan  $Y_1, \dots, Y_n$  skor örneklemini gözlemliyorsunuz. Ayrıca önceden şunları da biliyorsunuz:

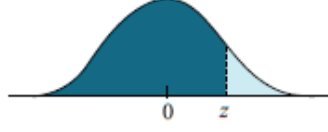
$$X \sim N(\mu_X, \sigma^2) \text{ ve } Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$$

Her birey ayrı ayrı ve aynı koşullarda teste tabii tutulduğundan gözlemlerin bağımsız olduğunu varsayıyoruz:

- (a)  $\bar{X}_m$  ve  $\bar{Y}_n$  varyanslarını hesaplayınız.  $\bar{X}_m - \bar{Y}_n$  varyansı nedir?
- (b)  $N = m + n$  sayıda toplam denek sayısı verilmiş iken,  $m$ 'in hangi değeri farkın varyansı olan  $\bar{X}_m - \bar{Y}_n$ 'i minimize eder?
- (c)  $\alpha = \%5$  büyüklüğü ile  $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ 'e karşı  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  testini yapmak istiyorsunuz. Varsayalım ki  $\sigma^2 = 4$ ,  $m = 20$ ,  $n = 8$ 'dir ve siz  $\bar{X}_m - \bar{Y}_n = 1.74$ 'ü buldunuz. Boş hipotezi ret eder misiniz?
- (d) Yukarıda elde ettiğiniz sonuçları kullanarak, % 95 olasılıkla  $\mu_X - \mu_Y = 0$  noktalarından  $\mu_X - \mu_Y = 1$  noktalarının etkisini ayırt etmek için en az kaç ilave katılımcı daha eklemek zorundasınız? İpucu: Denek grubuna veya kontrol grubuna ya da her iki gruba ekleme yapabilirsiniz (hangisi en az ilave katılım gerektiriyorsa).

İyi Tatiller

## Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan



(Devam)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3112
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Kaynak: MIT OpenCourseWare



## Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan

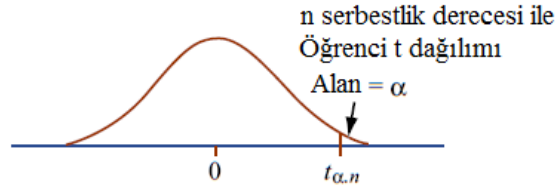
(Devam)

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Source: B. W. Lindgren, *Statistical Theory* (New York: Macmillan, 1962), pp. 392-393.

Kaynak: MIT OpenCourseWare

## Öğrenci t Dağılımının Üst Yüzelikleri



$\alpha$							
df	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	0.978	1.250	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	0.941	1.190	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	0.920	1.156	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	0.906	1.134	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	0.896	1.119	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	0.889	1.108	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	0.883	1.100	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	0.879	1.093	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	0.876	1.088	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	0.873	1.083	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	0.870	1.079	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	0.868	1.076	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	0.866	1.074	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	0.865	1.071	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	0.863	1.069	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	0.862	1.067	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	0.861	1.066	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	0.860	1.064	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	0.859	1.063	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	0.858	1.061	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	0.858	1.060	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	0.857	1.059	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	0.856	1.058	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	0.856	1.058	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	0.855	1.057	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	0.855	1.056	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	0.854	1.055	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	0.854	1.055	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
31	0.8535	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.453	2.7441
32	0.8531	1.0536	1.3086	1.6939	2.0370	2.449	2.7385
33	0.8527	1.0531	1.3078	1.6924	2.0345	2.445	2.7333
34	0.8524	1.0526	1.3070	1.6909	2.0323	2.441	2.7284

Kaynak: MIT OpenCourseWare