14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Sınav 2

Bahar 2009

Açıklamalar: Bu, kitapların ve notların kapalı olduğu bir sınav olacaktır. Hesap makinası kullanabilirsiniz. Lütfen önce sınavı baştan sona okuyarak anlaşılmayan yerleri sorunuz ve sorulara harcayacağınız zamanı ayarlayınız. Hesaplama hatalarının yapılması durumunda kısmı puan almak için lütfen yaptığınız bütün işlemleri gösteriniz. Sınavı bitirmek için aşağı yukarı 85 dakikanız var. İyi şanslar.

1. (15 Puan) Kısa Sorular. Cevaplar kısa ama tam olmalı

(a) Aşağıdaki ifadeleri onaylayın ya da düzeltin: X1 ve X2 gibi herhangi rastgele değişkenler için,

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] \quad \text{ve} \quad \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$$

(b) Varsayalım ki $X \sim U[0, 1]$ ve $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - X)$'tir. Y'nin CDF'sini bulunuz.

(c) İzleyen ilişkileri kısa açıklayınız: (1) Binom dağılım ile standart normal dağılım arasındaki ilişki ve (2) büyük n deneme sayılı binom deneyi için binom dağılım ile Poisson dağılım arasındaki ilişki.

2. (20 Puan). İşlerini henüz kaybetmiş olan işçilerin işsizlik sürelerini araştırıyoruz. İşsizlik süresi T'nin dağılımının p.d.f.si aşağıdaki gibidir: Bazı $\lambda > 0$ için

$$f_T(t;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{eğer} \quad t \geq 0 \;\; \text{ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

(a) Sabit bir λ değeri için $\mathbb{E}[T]$ ve $\mathbb{E}[T^2]$'yi hesaplayınız.
(b) Verili bir λ değeri için Var(T)'yi hesaplayınız.

Varsayalım ki işini kaybeden iki tür farklı işçi vardır: Çok talep edilen, kolay iş bulma eğiliminde ve oranı $p_S = 0.2$ olan yüksek kalifiye işçiler ile uzun süredir işsiz ve oranı $1- p_S$ olan kalifiye olmayan U işçiler. Kalifiye işçiler için, $\lambda_S = 0.32$'li p.d.f.si yukarıdaki gibi olan, haftalık ölçülen bir işsizlik süresi dağılımı vardır. Kalifiye olmayan işçiler için, $\lambda = \lambda_U = 0.8$'dir. Diğer bir ifadeyle, λ'yi λ_S ve λ_U değerlerini alan ve sırasıyla p_S ve $1 - p_S$ olasılığa sahip bir rastgele değişken gibi değerlendirebiliriz. p.d.f $f_T(t;\lambda)$ λ veri iken T'nin koşullu p.d.f.si ile ilintilidir.

(c) İşsizlik süresinin uzunluğunun koşullu olmayan beklenen değeri $\mathbb{E}[T]$'yi hesaplayınız.
(d) İşsizlik süresinin (koşullu olmayan) varyansı Var(T)'yi hesaplayınız.

(e) (λ, T)'nin bileşik p.d.f.si $f_{\lambda,T}$'yi ifade ediniz ve $P(\lambda = \lambda_S | T = 10)$ koşullu olasılığını hesaplayınız. Bu, koşullu olmayan $P(\lambda = \lambda_S) = p_S$ olasılığı ile nasıl karşılaştırılır? Sezgisel olarak, bu farkı nasıl açıklarsınız?

3. (10 Puan) Varsayalım ki X ve Y gibi iki rastgele değişkenin bileşik dağılımı hakkında aşağıdaki bilgiye sahipsiniz: Sırasıyla beklenen değerleri $\mathbb{E}[X] = 2$ ile $\mathbb{E}[Y] = 1.5$'tir ve varyansları $\mathrm{Var}(X) = 4$ ile $\mathrm{Var}(Y) = 9$'dur. Aynı zamanda korelasyon katsayısının $\varrho(X, Y) = 1/3$ olduğu biliniyor. Çarpımın beklenen değeri $\mathbb{E}[XY]$'yi hesaplayınız.

4. (30 puan) Varsayalım ki $X \sim N(0, \sigma^2)$'dir ve aşağıdakini tanımlıyoruz

$$Y = g(X) := \begin{cases} -1 & \text{eğer } X < -1 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } |X| \leq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } X > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

(a) σ^2 verili iken, Y'nin p.d.f.si nedir?
(b) σ^2'in bir fonksiyonu olarak beklenen değer $\mathbb{E}[Y]$ ve varyans $\mathrm{Var}(Y)$'yi hesaplayınız.
(c) Varyansın $\mathrm{Var}(Y) = 0.05$ olabilmesi için σ^2 ne olmak zorundadır?

Şimdi ise, X'in bir tür bilinmeyen *simetrik* bir dağılımdan elde edildiğini varsayalım, yani c.d.f.si $F_X(x) = 1 - F_X(x)$ koşulunu sağlasın ve varsayalım ki $\mathbb{E}[X] = 0$ ve $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ olsun. Aynı zamanda yeni rasgele değişken $Y = g(X)$ yukarıdaki gibi tanımlansın.

(d) C.d.f. $F_X(x)$ değerleri cinsinden beklenen değer $\mathbb{E}[Y]$ ve varyans $\mathrm{Var}(Y)$'yi bulunuz.
(e) X'in dağılımı konusunda daha fazla bilgi sahibi olmadan, aşağıdaki Chebyshev Eşitsizliğini kullanarak $\mathrm{Var}(Y) \leq 0.05$ koşullunu sağlayacak en büyük σ^2 değerini belirleyiniz. Bunu (c)'deki sonuç ile nasıl karşılaştırırsınız? *İpucu*: X'in c.d.f.si cinsinden Chebyshev Eşitsizliğinin sol tarafını yeniden yazmakla başlayın.

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

5. (15 Puan) Varsayalım ki i.i.d.olan $X_1, \ldots, X_n$ rasgele örneklemi gözlemlediniz. Burada X_i'ler her bir *i* için başarısızlık oranı λ olan bir üstel dağılımdır. Yani X_i'nin p.d.f.si şöyledir

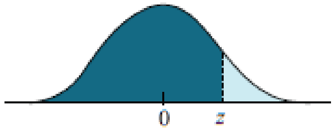
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{eğer if } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Biz örneklemin maksimumu ile ilgileniyoruz; $Y_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Y_n'nin *birikimli* dağılım fonksiyonu (c.d.f.) $F_{Y_n}(y)$'yi belirtiniz.
(b) Şimdi varsayalım ki $\lambda = 1$'dir. $\tilde{Y}_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\} - \log n$'nin c.d.f.si $F_{\tilde{Y}_n}$'yi elde ediniz ve $n \to \infty$ için aşağıdaki ilişkinin sağandığını gösteriniz.

$$\lim_{n \to \infty} F_{\tilde{Y}_n}(y) = e^{-e^{-y}}$$

Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan



(Devam)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3112
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Kaynak: MIT OpenCourseWare

Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan

(Devam)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2..3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	09988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Source: B. W. Lindgren, *Statistical Theory* (New York: Macmillan. 1962), pp. 392-393.

Kaynak: MIT OpenCourseWare