

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

14.30 Sınav I

Bahar 2009

Açıklamalar: Bu, kitapların ve notların kapalı olduğu bir sınav olacaktır. Hesap makinası kullanabilirsiniz. Lütfen önce sınavı baştan sona okuyarak anlaşılmayan yerleri sorunuz ve sorulara harcayacağınız zamanı ayarlayınız. Hesaplama hatalarının yapılması durumunda kısmi puan almak için lütfen yaptığınız bütün işlemleri gösteriniz. Sınavı bitirmek için aşağı yukarı 85 dakikanız var. İyi şanslar.

1 (20 Puan) Kısa sorular, Doğru, yanlış, belirsiz? her zaman kısa bir açıklama yapınız ya da basit bir karşı örnek geliştiriniz.

- (a) Eğer X ve Y bağımsız ise, o zaman rasgele X ve Y değişkenlerin bileşik dağılımı $f_{XY}(x,y)$ 'nin desteği dikdörtgendir.
- (b) Sürekli bir p.d.f hiçbir zaman 1'den büyük bir değer alamaz.
- (c) Aşağıdaki fonksiyon bir rasgele değişkenin c.d.f.'sidir:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 1 \quad \text{ise} \\ 0.2 & \text{eğer } 1 \leq x < 2 \quad \text{ise} \\ 0.2x & \text{eğer } 2 \leq x < 4 \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer } x \geq 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

- (d) (c)'deki fonksiyon bir kesikli rasgele değişkenin c.d.f.sidir.

2. (15 Puan) İki havayolu şirketi, Sun Express v Commuter Jet, ABD'nin dört büyük havaalanında hizmet vermektedirler. Bu havayollarının her birisinin güvenilirliği ile ilgileniyoruz ve elimizde aşağıdaki her bir şehirden rötörlü uçuşun (20 dakika veya daha fazla) olasılıklarının verisi var.

	Sun Express		Commuter Jet	
	Rötör %	Uçuş Sayısı/Gün	Rötör %	Uçuş Sayısı/Gün
Atlanta	12%	5	11%	10
Chicago	30%	3	25%	12
Phoenix	5%	8	5%	2
Seattle	25%	4	20%	6

(a) bu sayılar verili iken, ve diğer her şey sabit iken, hangi şirket daha iyi bir kayda sahiptir?

Bir web sitesi bütün havayolları için zamanda kalkış oranlarını rapor eder. Bu oranlar rasgele seçilen bir uçuş için bir eksi rötör olasılığı olarak tanımlanır. Bu dört şehrin herhangi birinden yapılan her bir uçuş eşit olasılıkla seçilebilir.

(b) Her iki havayolu şirketi için zamanında kalkış oranını hesaplamak için toplam olasılık kanununu kullanınız. Sonuçlarınıza göre, eğer sadece web sitesindeki bilgiye kullansaydınız, hangi hava yolu şirketini tercih ederdiniz?

(c) (a)'daki cevabınızla (b)'dekini nasıl bağdaştırırsınız? Koşullu ve koşullu olmayan olasılık açısından ilişkiyi tartışınız. Sınıftaki örnek ile paralellikler kurmakta serbestsiniz.

3. (15 Puan)

(a) Varsayalım ki aşağıdaki gibi bir fonksiyonumuz,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} cx^2y^2 & \text{eğer } 0 \leq x \leq 3 \text{ ve } 0 \leq y \leq 3 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

$f_{XY}(x, y)$ 'nin iki rasgele değişken olan X ve Y'nin uygun bir bileşik p.d.f'si olabilmesi için c ne olmak zorundadır? c'nin gerçek değerinin verildiği varsayımı altında, X ve Y bağımsız mı?

(b) Şimdi problemi çok az değiştirelim: varsayalım ki

$$g_{XY}(x, y) = \begin{cases} bx^2y^2 & \text{eğer } 0 \leq x \leq y \leq 3 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

(x, y) planında $g_{XY}(x, y)$ 'nin desteğini çiziniz (yani fonksiyonun kesin pozitif olduğu alanda). $g_{XY}(x, y)$ 'nin bir p.d.f olabilmesi için şimdi b ne olmak zorundadır? X ile Y hala bağımsız mı? Niye veya Niye değil?

4. (30 puan)

1890'nın Alaska Altına Hücumu sırasında bir madencisiniz. Ormanda bir dere boyunca bir arazi parçasını gözlemliyorsunuz ve orada altın bulma ihtimalinizin olup olmadığını belirlemek istiyorsunuz. Kasabaya koşup arazinin kullanmana izin veren resmi kaydı

yaptırmak pahalıya mal olacaktır, bu nedenle en azında %60 olasılıkla yer altında altın bulacağınızdan emin olmak istiyorsunuz. G incelediğiniz belli arazi parçasında altın bulunma olayı olsun, ve varsayalım ki elinizde daha fazla bilgi olmadan, altın bulma olasılığı $P(G) = 0.1$ 'dir.

Vahşi doğada geçen yıllardan sonra, bakılması gereken önemli işaretler olduğunu öğrendiniz: Eğer altın varsa, toprağın altındaki taşlar normalden daha siyahtır, çalılarının kökleri daha kısadır, o yerde bulduğunuz Amerikan üzümü(turna yemişi) daha tatlıdır ve karşılaştığınız ilk Amerikan geyiği kuyruğunu sağa doğru sallar. Eğer altın yoksa, bu işaretlerden herhangi birini yine de belli bir olasılıkla gözlemleyebilirsiniz, yani spesifik olmak gerekirse:

B	$P(B G)$	$P(B G^C)$
Geyik kuyruğunu sağa sallar	1.0	0.7
Siyah Taşlar	1.0	0.4
Kısa kökler	1.0	0.5
Tatlı Amerikan yemişler	1.0	0.3

Altının olup olmamasından ayrı olarak, kanıt işaretleri birbirinden bağımsızdır. Açık olmak gerekirse, eğer yukarıdaki işaretlerden ikisinin tutmadığını gözlemlerseniz, arazide kesin olarak altın yoktur ve başka yere gitmeniz gerekir.

Ancak vahşi bir rekabet vardır: diğer madencilerde aynı bölgeyi araştırmaktadırlar ve arazi tapu dairesine ilk gelen ve harcını ödeyene verilir. Dolayısıyla vereceğiniz karar mümkün olan en az kanıta dayandırmak zorundasınız, ve altın olduğundan yeterli düzeyde emin olunca da çok hızlı bir şekilde tapu dairesine gitmelisiniz, yani $P(G|B) \geq 0.6$ olur olmaz,

- Bayes kanunu belirtiniz. $P(G|B)$ için $P(G)$ ve $L = \frac{P(B|G)}{P(B|G^C)}$ oranına bağlı bir formül geliştiriniz. L 'de $P(G|B)$ artıyor mu, azalıyor mu?
- Tabloda listelenmiş her bir farklı işaret için L 'yi hesaplayınız. Bağımsızlık varsayımı altında, işaretlerin karışımı için L oranını nasıl hesaplarsınız? Yani $B =$ "siyah taşlar ve kısa kökler" gibi.
- L değerleri veri iken, hangi sırayla farklı işaretleri kontrol etmelisiniz? Eğer arazide altın varsa, $P(G|B) \geq 0.6$ 'dan önce en az kaç işareti kontrol etmek zorundasınız?

Şimdi ileriye sararak 2009 yılına gelelim, kuzey Kanada da altın arayan çokuluslu bir maden şirketinde baş maden arayıcısı olduğunuz varsayalım. N farklı noktada sondalama yapabilirsiniz ve laboratuvarında toprak numunelerini analiz ettirebilirsiniz. Verili bir numunede, altın varsa kimyasal bir analiz p olasılıkla pozitif sonuç vermektedir.

Eğer altın yoksa, pozitif bir sonucun olasılığı $1-p$ 'dir. Test N örnek arasında bağımsızdır. $B = \text{"N örnekten } x \text{ tanesi pozitif sonuç verdi"}$ olayı tanımlı olsun.

(d) N ve x 'e bağlı olarak, $P(B|G)$ olasılığı nedir? $L(N, x) = \frac{P(B|G)}{P(B|G^c)}$ oranını nedir?

(e) Varsayalım ki $p = 0.8$, ve 12 örnekten 4'ünde pozitif test sonucu elde ettik. $L(14, 4)$ nedir? (a)'daki cevabınıza göre olay sonrası (posterior) $P(G|B)$ nedir?

(f) Varsayalım ki x örnek için pozitif ve $x + 4$ için negatif test sonucu elde ettik (yani toplam örneklem sayısı $2x + 4$ 'tür). Cevabınız (e)'dekiinden nasıl farklılık gösterirdi?

5. (10 Puan) izleyen ifade doğru, yanlış, belirsiz mi?: "Eğer $P(A|B) > P(A)$ ve $P(A|C) > P(A)$ ise, o zaman $P(A|BC) > P(A)$ ". Her bir 4 sonucun olasılığını belirten ve A , B , ve C olaylarını tanımlayan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ uzayını kullanarak basit bir sayısal karşı örnek geliştiriniz.