14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 9 - Çözümler
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: Mayıs 8 2009

Soru Bir: Güven Aralığı

(Bain/Engelhardt p.384'ten uyarlanmıştır)

1. Eğer σ^2 = 15 olduğu biliniyor ise, n = 16 iken, $\bar{x}$ = 25.3 tahminine dayanarak μ için %90'lik güven aralığı belirleyiniz.

- 1'in Çözümü: Ders notlarındaki "Önemli Durumlar"'ın ilkinde yer alan formülde sadece bileşenleri yerine koyarız:

$$[A(X), B(X)] = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\sigma^2_{\hat{\theta}}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}),\ \hat{\theta} + \sqrt{\sigma^2_{\hat{\theta}}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right]$$

bu bize $\hat{\theta}$ = $\hat{x}$ = 25.3, α = 0.10 ve $\sigma^2_{\hat{\theta}}$= σ^2/n = 15/16 iken aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned}[A(X), B(X)] &= \left[25.3 - \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(.95),\ 25.3 + \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(.95)\right] \\ \mu &\in [23.71, 26.89]\end{aligned}$$

%90'lık olasılıkla, ya da güven aralığı %90 olasılıkla gerçeği kapsar (μ rasgele olmadığı için – güven aralığı rastgeledir).

2. (1)'deki bilgiye dayanarak, μ için tek taraflı alt %90'lik güven sınırını belirleyiniz. Aynı zamanda, μ için tek taraflı üst %90'lik güven sınırını da belirleyiniz.

- 2'nin Çözümü: μ için bir tek-yanlı alt %90'lık güven sınırı ve μ için bir tek-yanlı üst %90'lık güven sınırı μ'nun alt/üst sınırıyla ilintilidir. Sadece alt ve üst sınırların olasılıklarını ayarlayacağız böylece %10'luk hata ya alt ya da üst uçlarda olacaktır.

$$\begin{aligned}[A(X), B(X)] &= \left[25.3 - \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(.90),\, 25.3 + \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(1)\right] \\ &= [24.06, \infty]\end{aligned}$$

ve üst uç için:

$$\begin{aligned}[A(X), B(X)] &= \left[25.3 - \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(1),\, 25.3 + \sqrt{\frac{15}{16}}\Phi^{-1}(.90)\right] \\ &= [-\infty, 26.54]\,.\end{aligned}$$

Dikkat edilecek olursa, tek-yanlı güven aralığı iki-yanlı güven aralığına göre $\bar{x}$'ten daha kısadır, çünkü bütün hatayı sadece bir yana yükledik.

3. $(\bar{x} - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\, \bar{x} + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ile verilen güven aralığı formuna göre, belli bir λ genişliğindeki bir aralığı oluşturmak için gerekli örneklem büyüklüğünü bulmak için bir formül elde ediniz. Eğer $\sigma^2 = 9$ ise, 2 genişliğindeki %90'lık güven aralığını oluşturmak için gerekli olan örneklem büyüklüğü nedir?

- 3'ün Çözümü: Güven aralığının uzunluğu sadece iki uç arasındaki farktır:

$$\begin{aligned}\lambda &= \left(\bar{x} + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \lambda &= 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \\ n &= \left(\frac{2\sigma}{\lambda}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right)^2\end{aligned}$$

σ^2= 9, α = 0.10 ve λ = 2 için, aşağıdaki gibi bir örneklem büyüklüğüne ihtiyacımız var:

$$n = \left\lceil\left(\frac{2\cdot 3}{2}\Phi^{-1}(.95)\right)^2\right\rceil$$
$$n = 25$$

böylece, 2 uzunluğundaki (belki birazcık daha kısa) bir güven aralığı için 25 kadarlık bir örneklem büyüklüğüne ihtiyacımız var.

4. Varsayalım ki şimdi σ^2 bilinmiyor. Eğer n = 16 iken, $\overline{x}$ = 25.3 ve s^2 = 15.21 ise, %90'lık güven aralığını belirleyiniz.

- 4ün Çözümü: Sadece t-dağılımın ondalıklarını kullanan formüle ihtiyacımız var:

$$[A(X), B(X)] = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\hat{S}^2}t_{n-1}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}), \hat{\theta} + \sqrt{\hat{S}^2}t_{n-1}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right]$$

burada n-1 t dağılımının serbestlik derecesi parametresini ifade eder. Bu bize $\hat{\theta}$ = $\hat{x}$ = 25.3, α = 0.10 ve s^2 = 15.21 verir.

$$[A(X), B(X)] = \left[25.3 - \sqrt{\frac{15.21}{16}}t_{n-1}^{-1}(.95),\ 25.3 + \sqrt{\frac{15.21}{16}}t_{n-1}^{-1}(.95)\right]$$
$$\mu \in [23.59, 27.01]$$

İki faktörden ötürü bu %90'lık güven aralığının biraz daha geniş olduğunu not ediniz: 15.21> 15 ve t dağılımının kritik değerleri (ondalıklar) normalinkilerinden daha geniştir. Buradaki farkın çoğu t dağılımının geniş kritik değerlerinden kaynaklanmaktadır.

5. (4)'teki veriye dayanarak, σ^2 için %99'luk güven aralığı belirleyiniz. Aynı şekilde *n* = 14 içinde belirleyiniz. (İpucu: $\frac{n.s^2}{\sigma^2}$'nin dağılımı nedir? Normal dağılıma yaklaşan bir χ^2_{n-1}'dir, ner nasılsa normal dağılıma yaklaşmaktadır, fakat bu bölüm için χ^2_{n-1}'i kullanınız.)

- 5’in Çözümü: Bu güven aralığını oluşturmak için, ders notlarındaki “Önemli Durumlar”dan durum 4’u kullanacağız. Sabit değer a ve b’yi bulacağız ki aşağıdaki oluşsun:

$$P_{\sigma^2}(a \le s^2 \le b) = F_{s^2}(b) - F_{s^2}(a) = 0.995 - 0.005 = 0.99$$

Diğer bir ifadeyle, simetrik bir güven aralığına yoğunlaşacağız. Bunun içinde sadece aşağıdakini sağlayacak a ve b’ye ihtiyacımız olacak ki:

$$F_{s^2}(b) = 0.995\, and\, F_{s^2}(a) = 0.005$$

O halde s^2’nin dağılımı nedir? Doğrusu biz $\frac{n.s^2}{\sigma^2}$ dağılımının χ^2_{n-1}olduğunu biliyoruz. Bu nedenle yapmamız gereken, başa dönüp problemi bildiğimiz şeylere dönüştürmektir:

$$P_{\sigma^2}(a \le s^2 \le b) = P_{\sigma^2}\left(\frac{n \cdot a}{\sigma^2} \le \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} \le \frac{n \cdot b}{\sigma^2}\right)$$

bu bize $\frac{n.s^2}{\sigma^2}$ için kritik değerler verir. Fakat o zaman s^2 için güven aralığı oluşturmanın en kabul edilebilir yolu nedir? Şu cebirsel işlemleri yapabiliriz:

$$\begin{aligned} F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(.005) &= 4.60 = \frac{n \cdot a}{\sigma^2} \\ F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(.995) &= 32.80 = \frac{n \cdot b}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Bu şunları önerir:

$$\begin{aligned} P_{\sigma^2}(a \le s^2 \le b) &= P_{\sigma^2}\left(4.60 \cdot \frac{\sigma^2}{n} \le s^2 \le 32.80 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= P_{\sigma^2}\left(\frac{n \cdot s^2}{32.80} \le \sigma^2 \le \frac{n \cdot s^2}{4.60}\right) \\ &= P_{\sigma^2}\left(\frac{n}{32.80} \cdot s^2 \le \sigma^2 \le \frac{n}{4.60} \cdot s^2\right) \end{aligned}$$

Bu bize aşağıdaki güven aralığını verir:

$$[A(X), B(X)] = [7.42, 52.89]$$

Bu çok asimetriktir, çünkü 15.21 nokta tahminidir. n = 14 için (sonraki probleme bkz.), güven aralığı [7.14, 59.73] olurdu.

6. σ^2 için şimdi de normal tahmini kullanarak %99'luk güven aralığı elde ediniz. Aynısını n = 14 için de gösteriniz. Tahmininiz n = 16 ve n = 14 için akla uygun mu? Açıklayınız.

- 6'nın Çözümü: σ^2'nın %99'luk güven aralığı için normal tahmin sadece X^2_{n-1}'in yaklaşık olarak normalmiş gibi hareket etmeyi ve güven aralığını o tahminden oluşturmayı içerir. Eğer daha önceki problem setlerimizin birinden hatırlıyorsanız, $X^2_k \rightarrow$ N(k, 2k). Bu gerçeği kullanarak, basitçe daha önce yaptığımız gibi güven aralığını oluştururuz, fakat X^2_{n-1} yerine Normal dağılımı şöyle kullanırız:

$$P_{\sigma^2}(a \leq s^2 \leq b) = P_{\sigma^2}\left(\frac{n \cdot a}{\sigma^2} \leq \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} \leq \frac{n \cdot b}{\sigma^2}\right)$$

bu bize $\frac{n.s^2}{\sigma^2}$ için kritik değerler verir. Fakat o zaman s^2 için güven aralığı oluşturmanın en kabul edilebilir yolu nedir? Şu cebirsel işlemleri yapabiliriz:

$$\begin{aligned} F^{-1}(.005; n-1, 2(n-1)) &= 0.892 = \frac{n \cdot a}{\sigma^2} \\ F^{-1}(.995; n-1, 2(n-1)) &= 29.11 = \frac{n \cdot b}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Bu sonuç aşağıdakini önerir:

$$\begin{aligned} P_{\sigma^2}(a \leq s^2 \leq b) &= P_{\sigma^2}\left(0.892 \cdot \frac{\sigma^2}{n} \leq s^2 \leq 29.11 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= P_{\sigma^2}\left(\frac{n \cdot s^2}{29.11} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \cdot s^2}{0.892}\right) \\ &= P_{\sigma^2}\left(\frac{n}{29.11} \cdot s^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n}{0.892} \cdot s^2\right) \end{aligned}$$

Bu bize aşağıdaki güven aralığını verir:

$$[A(X), B(X)] = [8.36, 272.95]$$

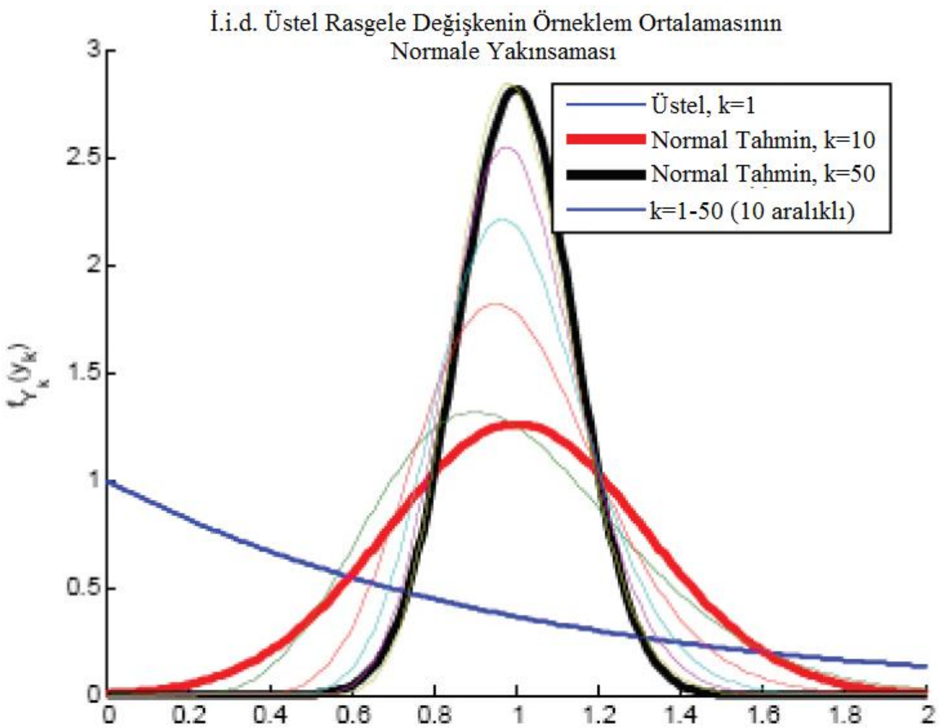
Bu çok asimetriktir, çünkü 15.21 nokta tahminidir. Çok geniş sağ kuyruğa dikkat ediniz. Gerçekte eğer rakamları biraz değiştirseydim, tahminin zayıflığından ötürü, negatif sağ kuyruğu olan bir güven aralığına ulaşabilirdim. n = 14 için, [8.15, -1586,7] gibi bir güven aralığı elde ederiz. Bu hiçbir anlam ifade etmez çünkü üst sınır alt sınırdan büyük değildir ve negatiftir. Bu, karelerin toplamı için imkansızdır. Ancak, daha büyük n değerleri için, tahmin çok daha iyi çalışır.

Soru İki: Ampirik Örnekler

Aşağıdaki veri belli bir uçakdaki klimaların saat cinsinden kaç kere bozulduğu ile ilgilidir: 74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 29, 386, 59, 27, 153, 25, 232. Verinin üstel bir $X_i \sim EXP(\theta)$ dağılımından elde edilen bir rasgele örneklemin gözlemlenmiş değerleri olduğunu varsayın.

1. Bozulmalar arasındaki ortalama zaman, θ, için % 90'lık bir güven aralığı oluşturunuz.

1'in Çözümü: Gözlemlerin örneklem ortalamasını hesaplarken, $\overline{x}$ = 114.93 elde ettim. θ parametresi örneklem ortalaması olan $\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ maksimum olabilirlik tahmin edicisine sahiptir. Bu nedenle, θ için bir güven aralığı oluşturmak için, ya Normal dağılıma (n = 15 büyük değildir, fakat yeterli bir büyüklük olabilir- Problem Set 5, Soru '1den getirilen ve EXP(θ=1) için sonlu örneklem dağılımı türettiğimiz aşağıdaki resme bakınız), ya da n kadar üstel dağılımlı rasgele değişkenin ortalaması için sonlu örneklem dağılımına gereksinim vardır.



Kolay ve tamamen parametrik-olmayan (asimptotik normal elde etmek için Merkezi Limit Teoremi uygulandığı sürece herhangi bir dağılıma bağlı değildir) olduğundan, ortalama için ilk önce Normal dağılımı deneyeceğim:

$$[A(X), B(X)] = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\hat{S}^2} t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}),\ \hat{\theta} + \sqrt{\hat{S}^2} t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right]$$

burada $\alpha = 0.10$, $\hat{\theta} = \bar{x} = 114.93$, $s^2 = 21651$ ve $n = 15$'tir. $\hat{\theta}$'in varyansı $\frac{\sigma^2}{n}$'dır.

$$\begin{aligned}[A(X), B(X)] &= \left[114.93 - \sqrt{\frac{21,651}{15}} t_{n-1}^{-1}(.95),\ 114.93 + \sqrt{\frac{21,651}{15}} t_{n-1}^{-1}(.95)\right] \\ &= [48.01, 181.85].\end{aligned}$$

Şimdi, üstel rasgele değişkenlerin toplamının dağılımının sonlu örneklemini kullanmaya teşebbüs edeceğim. Ancak, üstel rasgele değişkenin toplamının *Gamma(n, θ)* dağılımlı olduğu anlaşılıyor(Kaynak: Wikipedia: Exponential Distribution). Dolaysıyla, eğer ortalama için bir güven aralığı istiyorsak, toplam için güven aralığı oluşturduktan sonra yapmamız gereken şey n ile bölerek geriye doğru ölçeklemektir(yada başlangıçtan itibaren bir rasgele değişken dönüşümü yapabiliriz, fakat toplamaya yoğunlaşmayı tercih edeceğim). Özellikle elimizde şu var,

$$P_\theta(a \leq \hat{\theta} \leq b) = P_\theta(a \cdot n \leq \hat{\theta} \cdot n \leq b \cdot n)$$

bu *Gamma(n, θ)* dağılımlıdır. O halde, *Gamma(n, θ)* dağılımının gerekli ondalıklarını elde edelim:

$$\begin{aligned} F_\Gamma^{-1}(.05; n, \theta) &= n \cdot a \\ F_\Gamma^{-1}(.95; n, \theta) &= n \cdot b \end{aligned}$$

Burada θ argümanları cinsinden tersini alacağız:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} F_\Gamma^{-1}(.05; n, \theta) &= a \\ \frac{1}{n} F_\Gamma^{-1}(.95; n, \theta) &= b \end{aligned}$$

Bu bize aşağıdaki olasılık ifadesi verir:

$$P_\theta(a \leq \hat{\theta} \leq b) = P_\theta(\frac{1}{n} F_\Gamma^{-1}(.05; n, \theta) \leq \hat{\theta} \leq \frac{1}{n} F_\Gamma^{-1}(.95; n, \theta))$$

Bir Matematik yazılımı kullanıp G(θ;α) = $\frac{1}{n} F_\Gamma^{-1}(\alpha; n, \theta)$ fonksiyonunu tanımlayarak sınırların tersini alabiliriz:

$$P_\theta(G^{-1}(\hat{\theta}; 0.95) \leq \theta \leq G^{-1}(\hat{\theta}; 0.05)) = [78.77, 186.45]$$

2. Bozulmalar arasındaki zaman dağılımının 10.nuncu yüzdelik dilimi için tek taraflı bir %95'lik alt güven sınırı oluşturunuz.

- 2'nin Çözümü: Şimdi θ için bir güven aralığımız olduğundan, bozulmalar arasındaki zamanın dağılımının %10'luk diliminin sadece θ'nın fonksiyonu olduğunu bilmek işimizi çok kolaylaştıracaktır. Yine şansımıza, söz konusu fonksiyon monotoniktir, ki bu işimizi daha da kolaylaştıracaktır. Ondalıkların monoton dönüşüm özeliği için eşit varyansı kullanarak, şunu uygularız: monoton fonksiyon F(.) için,

$$P_\theta(a \leq \theta \leq b) = P_{F(\theta)}(F(a) \leq \theta \leq F(b))$$

Sadece, bir üstel rasgele değişken için 10.nuncu yüzdelik fonksiyonun θ'da monotonik olduğundan emin olmamız gerekiyor.

$$F(x;\theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = u$$

Burada μ CDF'nin ondalığıdır. Buradan şunu elde ederiz:

$$x = -\theta log\,(1-u)$$

Bu açıkça θ'da monotoniktir. Böylece, basitçe yukarıda monotonik bir fonksiyon için gösterdiklerimizi uygulayarak, sadece θ için oluşturulan %90'luk güven aralığının sınırlarında fonksiyonu hesaplamamız gerekiyor: θ'nın güven aralığının normal tahmini için,

$$F^{-1}(.10;\theta) \in [5.06, 19.16]$$

ya da θ'nın %90 güven aralığının Gamma dağılımının ondalıkları kullanan kesin sonuç için:

$$F^{-1}(.10;\theta) \in [8.30, 19.65]$$

Tek-yanlı alt sınır ya da tek yanlı %95'lik güven aralığı için, sadece 1'deki güven aralığının alt ucu için $F^{-1}(0.10;\theta)$ hesaplarız: Tek yanlı güven aralığının normal tahmini için

$$F^{-1}(.10;\theta) \in [5.06, \infty]$$

ve

$$F^{-1}(.10;\theta) \in [8.30, \infty]$$

elde ederiz.

Soru Üç: Hipotez Testi Kavramları

1. Boş, H_0, ve Alternatif, H_a, hipotezi tanımlayınız ve farklarını açıklayınız.
    - 1'in Çözümü: Boş hipotez test edilmesi gereken hipotezdir, alternatif hipotez ise boş dışında kitle hakkında olası diğer varsayımları toparlar. Özellikle, boş hipotez iddia edilir ve kanıt veya veri kullanarak istatistiki olarak çürütürüz veya ret ederiz. Bazen gerçekten onu çürütmeye çalışmayız, aksine ona yakın alternatifleri kabul etmemeye çalışırız. Örneğin, bir yıllık okullaşmanın ortalama getirisinin %9 olduğunu ispatlamaya çalışsaydık, ama güven aralığımız -%20'den %38'e gitseydi, o zaman boş hipotez olan %9 getiriyi ret edemezken, %15 veya %-5 gibi yakın alternatifleri ret etmek için de yeterli kanıtımız olmazdı .

2. 1. Tip hatanın tanımını iki kere yazınız: önce matematiksel ifadeler ile sonra kelimeler ile.
    - 2'nin Çözümü: Notlarımızdan,

$$\alpha = P(\text{1. Tip Hata}) = P(\text{ret et}|H_0)$$

ya da kelimeler ile ifade edecek olursak, 1. Tip Hata gerçekte doğru iken boş hipotezi ret etme olayıdır.

3. Şimdi de 2. Tip hatanın tanımını iki kere yazınız: önce matematiksel ifadeler ile sonra kelimeler ile.
    - 3'ün Çözümü: Yine notlardan,

$$\beta = P(\text{2. Tip Hata}) = P(\text{ret etme}|H_a)$$

ya da kelimeler ile ifade edecek olursak, 2. Tip Hata gerçekte alternatif doğru iken boş hipotezi ret etmeme olayıdır.

4. Aşağıdaki kutunun "1.Tip hata" ve "2.Tip hata" nın yazılması gereken yerleri doldurunuz:

	H_0'ı Ret Et	H_0'ı Ret Etme
H_0 Doğru		
H_a Doğru		

- 4'ün Çözümü:

	H_0'ı Ret Et	H_0'ı Ret Etme
H_0 Doğru	1. Tip Hata	Doğru
H_a Doğru	Doğru	2. Tip Hata

5. Amerika Birleşik Devletleri'nin hukuk sisteminde bir şüphelinin "aksi ispatlanıncaya kadar masum" olduğu ifade edilir. Bu ifadenin eşdeğeri olan boş hipotezi ve tamamlayıcısı alternatif hipotezi yazınız. Ayrıca 1. Tip ve 2. Tip hatayı ifade ediniz. Cevaplarınızı yukarıda soru (4)'teki gibi kutu içinde veriniz.
   - 5'in Çözümü: Boş hipotez H_0 : Şüpheli suçsuzdur, alternatif hipotez H_a : Şüpheli suçludur. 1. Tip hata suçsuz birini suçlu bulup hapse göndermektir. 2.nci Tip Hata suçlu birini suçsuz bulmaktır.

	Suçu İspatlama	Suçu İspatlayamama
Şüpheli Masum	1. Tip Hata	Doğru
Şüpheli Suçlu	Doğru	2. Tip Hata

Soru Dört: Güç Eğrileri

Varsayalım ki aşağıdaki testi yapmak amacıyla bir büyüklüğündeki bir örneklem PDF $f_Y(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}$, $y > 0$'dan alınmıştır.

$$H_0 : \lambda = 1\text{'e karşı } H_1 : \lambda > 1$$

Eğer y > 3.20 ise boş hipotez ret edilir.

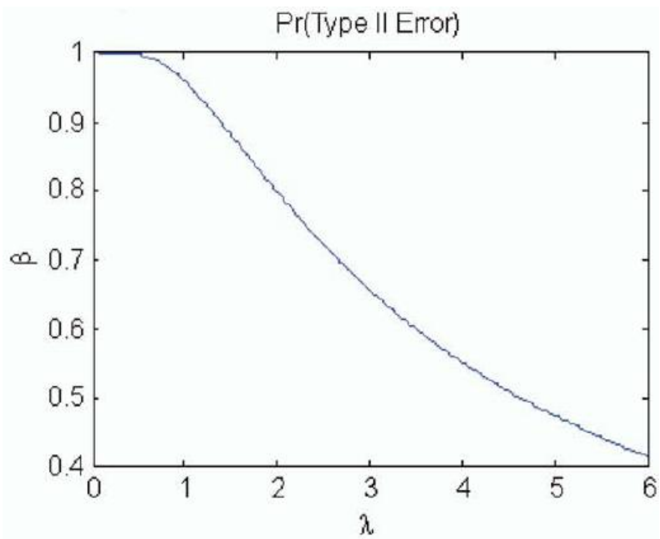
1. 1. Tip hata yapma olasılığını hesaplayınız.
   - 1'in Çözümü: 1.nci Tip Hata yapmanın olasılığı $P(\text{ret et}|H_0) = 1 - F(3.20|\lambda = 1) = 0.0408$.

2. $\lambda = 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$ veya 3.2 iken 2. Tip hata yapma olasılığını hesaplayınız.
   - 2'nin Çözümü: 2.nci Tip Hata yapmanın olasılığı $P(\text{ret etme}|H_a) = F(3.20|\lambda = \lambda_a)$

Söz konusu farklı değerler için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

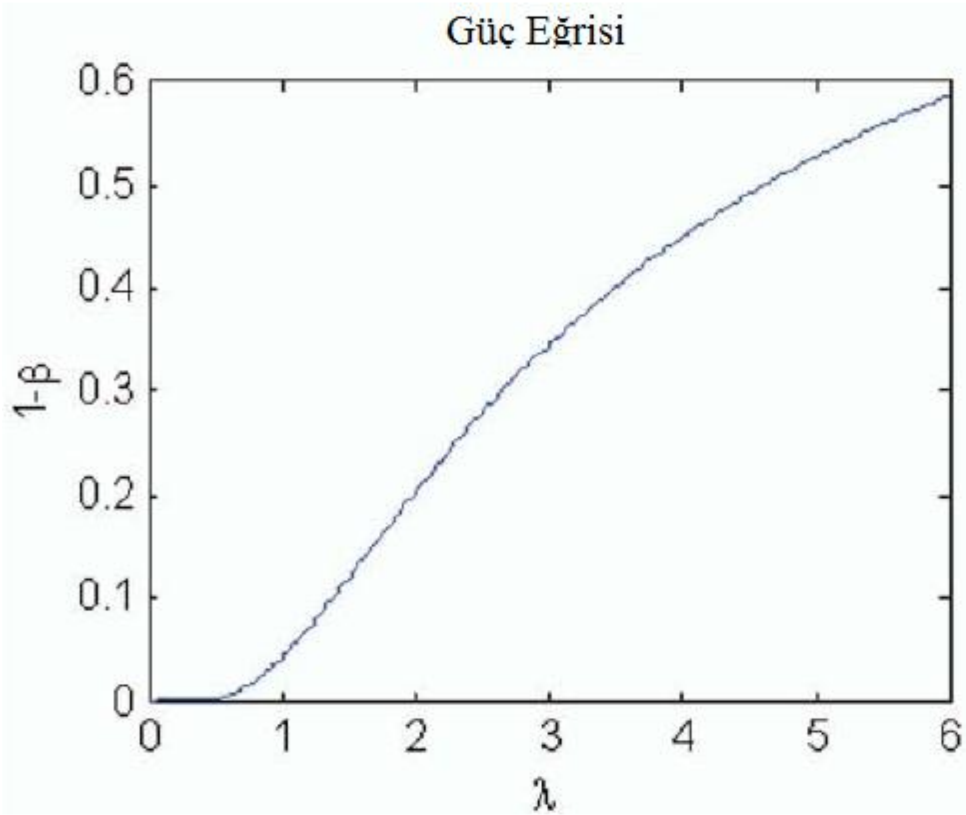
λ	β
1.00	0.9592
1.33	0.9093
1.50	0.8816
2.00	0.7981
2.50	0.7220
3.00	0.6558
3.20	0.6321

Bütün aralık için grafik:

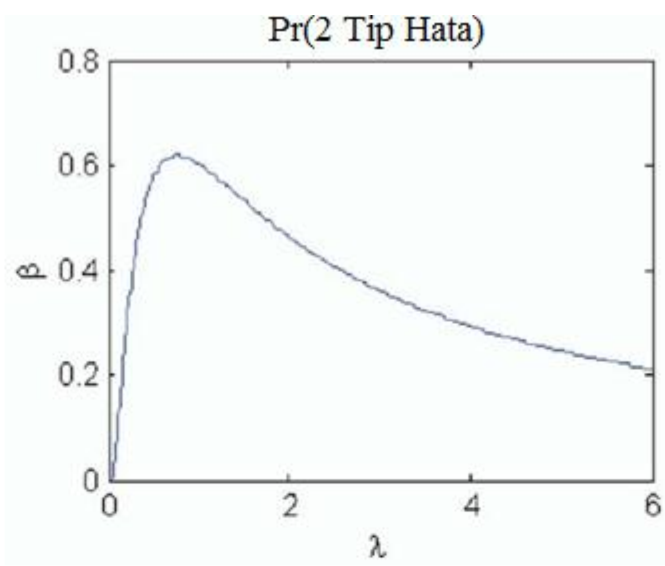


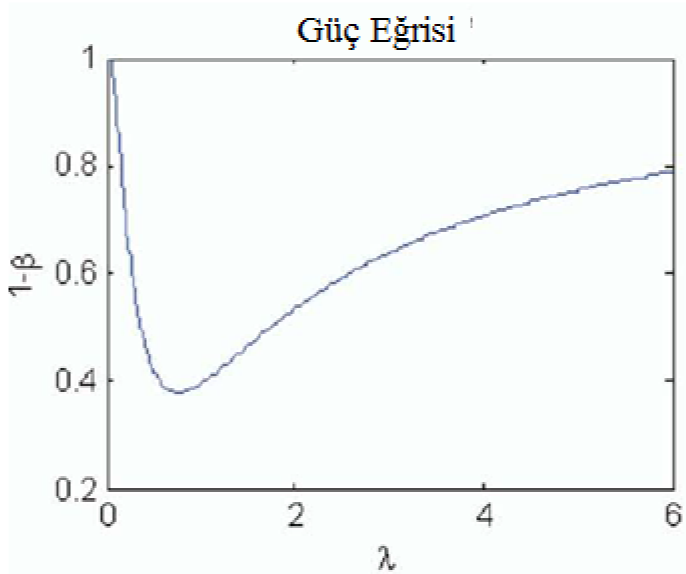
Tek yanlı hipotezimiz olduğu için, 2. Tip hatanın olasılığı $\lambda < 1$ için 1'e yaklaşır.

3. 2. Tip hata β ile temsil edilmiş olsun. λ'ya karşı (2)'de elde edilen $1 - \beta$ noktalarını grafikte gösteriniz ve noktaları birleştiriniz. Şu anda test için bir güç eğrisi oluşturmuş bulunuyorsunuz.
    - 3'ün Çözümü: Bunun için sadece grafik oluşturacağım:



4. Eğer y $\notin$ [0.25, 1.75] olayında boş hipotezi ret edersek, $H_0 : \lambda = 1$'e karşı $H_1 : \lambda \neq 1$ testi için düşündüğünüz güç eğrisinin neye benzeyeceğini çiziniz. Simetrik mi ya da çarpık mı olacağına özellikle dikkat ediniz? Cevabınızı desteklemek için $\lambda = 0.25$ ve 1.75 iken 2.Tip hatanın olasılığını da hesaplayınız.
   - 4'ün Çözümü: Eğer [0.25, 1.75] aralığın dışında y'yi ret edersek, o zaman 2. Tip hata olasılığı F(1.75) – F(0.25)'tir. Üstel dağılım çarpık olduğu için, bunun da çarpık olmasını bekleriz.





Soru Beş: Hipotez Testinin Uygulamaları

Atlantik Okyanusu'nun belli bölgelerinde çalışan bir ticari balıkçının çabaları bazen balinaların varlığıyla engellenir. İdeal olanı, balıkları ürkütmeden balinaları korkutup uzaklaştırmaktır. Denenmiş stratejilerden bir tanesi ise, deniz altından katil balinaların sesini yaymaktır. Bu tekniğin denendiği 52 durumda, 24 kere işe yaramıştır (yani balinalar kaçıp gitmiştir). Ancak tecrübe göstermiştir ki, balıkçı teknesinin etrafında görülen balinaların %40'ı, büyük bir ihtimalle motorun sesinden ve kötü kokudan ötürü, kendiliğinden uzaklaşırlar.

1. p katil balinanın sesini duyan bir balinanın ayrılma olasılığı olsun. α = 0.05 güvenirlik düzeyinde H_0 : p = 0.40'a karşı H_1 : p > 0.40'ı test ediniz. Bu sonuçlar, balık avlanan suları istenmeyen balinalardan temizlemek için düşmanın sesini deniz altından yaymanın etkili bir yöntem olduğu tartışılabilir mi?
    - 1'in Çözümü: Biz $\hat{p}$ = 24/52'nin 0.40'tan farkının istatistiki olarak anlamlı olup olmadığını test etmek istiyoruz. Bunu iki farklı yoldan yapabiliriz, ya p-değerini hesaplayarak veya %95'lik güven aralığı oluşturarak. İlk önce, boş hipotez altında en az en uçta bulunan bir şeyi elde etmenin olabilirliğine bakarak p-değerini hesaplayacağız:

$$p\text{-değeri} = 1 - F(23|H_0) = 1 - \sum_{i=0}^{52} 0.4^i (1-0.4)^{52-i} = 0.2213.$$

p-değeri 0.2213 > 0.05 olduğu için, boş hipotezi ret etmek için yeterli kanıtımız yok. $\alpha = 0.25$ için, ret edebilirdik, bu çok inandırıcı olmazdı. Binom veya normal tahmin kullanarak, tek yanlı %95'lik güven aralığı oluşturabiliriz: Eğer normal dağılımın kritik değerlerini kullanırsak,

$$p \in \left[\frac{24}{52} - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}, 1\right]$$
$$p \in [0.3478, 1]$$

fakat t_{52-1} kritik değerlerini kullanırsak, küçük ve sonuç açısından çok önemsiz fark oluşur.

$$p \in \left[\frac{24}{52} - 1.6753 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}, 1\right]$$
$$p \in [0.3457, 1]$$

Böylece, tahminden bağımsız olarak, güven aralığımız boş hipotezi içermektedir, böylece ret edemeyiz. Normal ve t-dağılımı tahminini kullanan boş hipotez p-değerleri, sırasıyla, 0.1867 ve 0.1888'dir. Dolaysıyla, sualtı katil balina sesi aktarımının herhangi bir etkisinin olup olmadığını söyleyecek durumda değiliz. Belki tekrar tekrar denemeliyiz. iki yanlı %95'lik güven aralığı 0.60'a giderken, en azından mükemmel bir sorun çözücü olmadığını biliyoruz: eğer normal dağılımın kritik değerlerini kullanırsak,

$$p \in \left[\frac{24}{52} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}, \frac{24}{52} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}\right]$$
$$p \in [0.3260, 0.5970]$$

fakat eğer t_{52-1} kritik değerlerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
p &\in \left[\frac{24}{52} - 2.01 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}, \frac{24}{52} + 2.01 \cdot \sqrt{\frac{\frac{24}{52}(1-\frac{24}{52})}{52}}\right] \\
p &\in [0.3457, 0.6003]
\end{aligned}
$$

2. Bu veri için p-değerli hesaplayınız. Hangi α değeri için H_0 ret edilir.
- 2'nin Çözümü: 1'e bakınız.

Soru Altı: Bir'e Karşı İki taraflı Hipotezler; Örneklem Varyansı

Varsayalım ki doğum sırasında bebeklerin ağırlığı, ortalaması 7 ve varyansı 1 pound olan, bir normal dağılımdır. Bir doğum uzmanın hamile kadınlara, bebeklerin ortalamadan 1 pound daha hafif olmalarına neden olan (fakat varyansı hala aynı) yanlış bir diyet önerisinde bulunduğundan şüphe ediliyor. Onun doğurduğu n = 10 tane bebeğin ağırlıklarını gözlemlediniz. Bebeklerin ortalama ağırlığı 6.2 pounddur.

1. Varsayalım ki, doğum uzmanı kötü öneride bulunmuyor boş hipotezine karşı kötü öneride bulunuyor alternatif hipotezini test etmek istiyorsunuz. Matematiksel olarak boş hipotezi ve alternatif hipotezi yazınız.
- 1'in Çözümü: Test etmek istediğimiz boş hipotez, bu kadın doğum uzmanının doğurduğu bebeklerin aynı ağırlıkta olup olmadıklarıdır:

$$
\begin{aligned}
H_0 : \mu &\geq 7 \\
H_a : \mu &< 7
\end{aligned}
$$

Ayrı bir seçenek olarak, hipotezleri şöyle yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
H_0 : \mu &= 7 \\
H_a : \mu &= 6
\end{aligned}
$$

Bu basit bir alternatif hipotez olurdu (ayrıca dolaylı olarak doğum ağırlıklarının Normalliği varsayılıyor- yani doktorun tavsiyesi sadece ortalamayı 6'ya düşürür).

2. Boş hipotezin %5'lik testini yapınız.

- 2'nin Çözümü: ağırlıkları 6.2 ve daha az boş hipotezi altında 10 bebek doğurmanın olasılığı:

$$\Phi\left(\frac{6.2-7}{\frac{1}{\sqrt{10}}}\right) = 0.0057.$$

Bu bizim p-değerimizdir. Bu boş hipotezi ret etmemiz için gerekli olan %5 düzeyinden çok düşüktür. Dolayısıyla biz doktorun kötü öneride bulunduğu sonucuna varıyoruz.

Eğer basit bir hipotez kullansaydık, o zaman Neyman-Pearson Lemma'yı kullanacaktık ve sadece olabilirlik test oranı olan k istatistiğini hesaplayacaktık. Bu şu hesabı içerir

$$-2logT(\bar{x}) = -2log\left(\frac{f_0(\bar{x})}{f_a(\bar{x})}\right)$$

ve χ_1^2 dağılımının kritik değerleri ile karşılaştırmayı gerektirir. Boş ve alternatif hipotez için normal dağılımı fakat farklı ortalama kullanarak testi yaptığımızda, -2logT($\bar{x}$) = 6.00 elde ederiz. Bu χ_1^2'nın %5'lik kritik değeri olan 3.84'ten daha büyüktür. Böylece basit alternatif lehine boş hipotezi ret ederiz.

3. Varsayalım ki siz sadece bebeklerin ağırlıklarının dağılımının ortalamasını biliyorsunuz ancak varyansı bilmiyorsunuz, fakat varyansı tahmin ettiniz, s^2 = 1.5. Alternatif hipoteze karşı %5'lik boş hipotez testini yapınız.
   - 3'ün Çözümü: Esas itibariyle aynı testi uygularız, ancak t dağılımının ondalıklarını kullanırız:

$$F_t\left(\frac{6.2-7}{\frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{10}}}; 10-1\right) = 0.0344$$

Böylece, %5'lik düzeyde, p-değeri şimdi çok daha yüksek olmasına rağmen (6 kat), yine aynı sonuca ulaşıyoruz.

t dağılımının oranı olabilirlik testinin χ_1^2 olmasının hoş özeliklerine asimptotiklik dışında sahip olamayacağı için, biraz karmaşık olmasına rağmen, bu testi basit alternatifi kullanarak uygulayabiliriz. Fakat, her ne olursa olsun yine de uyguluyoruz ve olabilirlik oranını hesaplıyoruz:

$$-2log\left(\frac{t_9\left(\frac{6.2-7}{\frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{10}}}\right)}{t_9\left(\frac{6.2-6}{\frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{10}}}\right)}\right) = 3.59$$

Bu χ_1^2 dağılımının %5'lik kritik değeri olan 3.84'ten küçüktür, böylece, yine alternatif lehine boş hipotezi ret edemiyoruz (varyans tahminimiz daha büyük olduğu için, bunun çok sürpriz olmaması gerekiyor).

4. Eğer alternatif hipotezini doğum uzmanının bebeklerin ağrılığını, pozitif veya negatif olarak, etkilediği şeklinde değiştirseydiniz, yukarıdaki cevaplarınızdan herhangi biri değişir miydi? Eğer değişirse, p-değerlerini ve sonucu ona göre değiştiriniz.
   - 4'ün Çözümü: Eğer onun yerine H_a : $\mu \neq 7$ ile temsil edilen sıra dışı bir şey yaptığı alternatifine sahip olsaydık, o zaman testimizi ayarlamak zorunda kalacaktık. Bütün p-değerleri iki katına çıkacaktı (doğum ağırlıklarını etkilemek için bir şey yaptığı testini ret edecek üst uçta bir şey bulabilme olasılığını hesaba katmak için). Özelikle, p-değerlerimiz bölüm (2)'de 0.0114 olurdu, ki bu sonucumuzu etkilemezdi, bölüm (3)'te 0.688 olurdu, ki bu sonucumuzu etkilerdi ve ret etmeyecektik.

     Bu problem basit alternatif için uygun değildir. Onu μ = 8 olarak tanımlar mıydınız? Basit olmayan alternatif $\mu \neq 7$ iki yanlı test için daha uygun gibi görünüyor.