

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

Problem Seti 5

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 31 Mart 2009

Soru Bir

Bağımsız rasgele değişkenlerin toplamı veya ortalaması ile ilgilendiğimizde Büklüm teoremi çok yararlı bir hiledir. Son problem setinde, aşağıdaki X rasgele değişkeni ile ilgilendik.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Şimdi, varsayalım ki $X = X_1 = X_2 = \dots = X_k$ bağımsız ve aynı dağılımlı (i.i.d.) rasgele değişkenlerdir.

1. Büklüm formülünü kullanarak, $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ için PDF tanımlayınız. (İpucu: $Z_1 = X_1$ ile $Z_2 = X_1 + X_2$ 'ü tanımla ve sonra dönüştürme yöntemini kullanarak Z_2 'den Y_2 'yi elde et.)
2. Beklenen değer $E[Y_2]$ 'yi hesaplayınız.
3. Büklüm formülünü kullanarak, $Y_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ için PDF tanımlayınız. (İpucu: Bölüm 1'deki ipucunu kullanarak $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$ 'ü tanımlayınız, X_3 ve Z_2 ile büklüm yaparak problemi Z_2 ve Z_3 'e dönüştürünüz.)
4. Beklenen değer $E[Y_3]$ 'ü hesaplayınız.
5. Büklüm formülünü kullanarak, $Y_k = \frac{1}{k}(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_k$ için PDF tanımlayınız. (İpucu: bölüm 1 ve bölüm 2'deki ipuçlarının yöntemlerini kullanarak bir örnek süreç belirleyiniz.)
6. Beklenen değer $E[Y_k]$ 'yi hesaplayınız.

7. Bu bize k büyüklüğündeki bir örneklemin ortalaması hakkında ne söylüyor? Bu özellik üstel dağılıma mı özgü? Açıklayınız.

Soru 2

(Bain/Engelhardt, s.228)

Varsayalım ki X_1, X_2, \dots, X_k bağımsız rasgele değişkenlerdir ve bütün $i = 1, 2, \dots, k$ için $Y_i = u_i(X_i)$ olsun. Y_1, Y_2, \dots, Y_k 'nin bağımsız olduğunu gösteriniz. Sadece X_i 'nin bağımsız ve $X_i = w_i(Y_i)$ 'nin bire-bir olduğu durumu ele alınız. *İpucu*: Eğer $x_i = w_i(y_i)$ ters dönüşüm ise, o zaman Jacobian aşağıdaki, gibidir:

$$J = \prod_{i=1}^k \frac{d}{dy_i} w_i(y_i).$$

Fazladan puan için Jacobian ile ilgili ipucunu ispatlayınız.

Soru Üç

Sonraki bir problem setine aktarılmıştır.

Soru Dört

Örneklemin özelliklerini analiz etmek için sıra istatistiği çok yararlıdır.

1. CDF $F_X(x)$ 'li bir rasgele değişken X 'in n büyüklüğündeki örnekleminin k .ncı sıra istatistiği için pdf ve cdf genel formüllerini yazınız.

Soru Beş

(Bain/Engelhardt, s.229)

X_1 ve X_2 sürekli bir dağılımdan elde edilen $n = 2$ büyüklüğünde rasgele bir örneklem olsun. Dağılımın pdf'si, eğer $0 < x < 1$ ise, $f(x) = 2x$ 'tir, diğer durumlarda ise sıfırdır.

1. En büyük ve en küçük sıra istatistiklerin, Y_1 ve Y_2 , marjinal pdf'lerini bulunuz.
2. Beklenen değerlerini, $\mathbb{E}[Y_1]$ ve $\mathbb{E}[Y_2]$, hesaplayınız.
3. Y_1 ve Y_2 'nin bileşik pdf'sini bulunuz.
4. $R = Y_2 - Y_1$ örneklem aralığının pdf'sini bulunuz.
5. Örneklem aralığının beklenen değerini hesaplayınız, $\mathbb{E}[R]$.

Soru Altı

(Bain/Engelhardt, s.229)

Pdf'si $0 \leq x < \infty$ durumunda $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ve diğer durumlarda sıfır olan bir dağılımdan elde edilen n büyüklüğündeki bir rasgele örneklem düşününüz.

1. Sıralı istatistiğin bileşik pdf'sini bulunuz.
2. En küçük sıralı istatistiğin pdf'si olan Y_1 'i bulunuz.
3. Beklenen değer $\mathbb{E}[Y_1]$ 'i hesaplayınız. Eğer yoksa, nedenini açıklayınız.
4. En büyük sıralı istatistiğin pdf'si Y_n 'i bulunuz.
5. $f(x)$ 'ten yapılan tek çekiliş X 'in beklenen değeri $\mathbb{E}[X]$ 'i hesaplayınız. İntegral sapıyor mu? O $\mathbb{E}[Y_n]$ 'nin varlığı hakkında ne söyler? Açıklayınız.
6. $n = 2$ için örneklem aralığı, $R = Y_n - Y_1$ 'in pdf'sini elde ediniz. *İpucu:* kısmi fraksiyonları kullanınız, Yahoo'da "QuickMath"i arayarak kısmi farksiyon hakkındaki yardımı bilgisayardan alabilirsiniz:
<http://72.3.253.76:8080/webMathematica3/quickmath/page.jsp?s1=algebra&s2=partialfractions&s3=basic>
7. Beklenen değer $\mathbb{E}[R]$ 'yi hesaplayınız. Eğer yoksa, nedenini açıklayınız.
8. n 'nin tekli sayı olduğu ve $r = (n + 1)/2 \in \mathbb{N}$ durumunda, örneklemin medyanın pdf'sini, Y_r , bulunuz. Pdf'yi sadece r ve y_r cinsinden ifade ediniz (bütün n 'leri ve k 'leri elimine ediniz).
9. Beklenen değer $\mathbb{E}[Y_r]$ 'yi hesaplayınız. Neden mevcut olmadığını açıklayınız.